1. 둘레의 길이가 $24\,\text{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

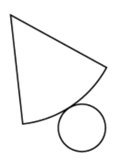
반지름 $x\,\text{cm}$, 호의 길이를 $(24-2x)\,\text{cm}$ 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36)+36 \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 $6\,\text{cm}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $36\,\text{cm}^2$ 를 가진다.

따라서 호의 길이는 $24-2x=12\,\text{cm}$ 이다.

2. 다음 그림은 원뿔을 전개한 것이다. 전개도 중 부채꼴 부분의 둘레의 길이가 12 이다. 부채꼴 부분의 넓이가 최대일 때, 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{\pi}$

해설

부채꼴의 반지름(원뿔에서의 모선)의 길이를 r , 호의 길이(원뿔의 밑면의 둘레의 길이)를 l 이라고 하면

$2r + l = 12$, $l = 12 - 2r$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(12 - 2r) \\ &= -r^2 + 6r \\ &= -(r-3)^2 + 9 \end{aligned}$$

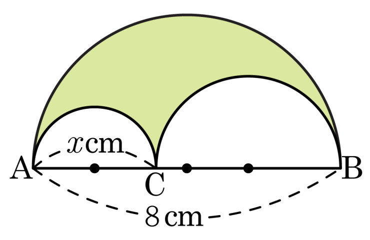
따라서 부채꼴 부분의 반지름이 3 일 때, 넓이가 최대가 된다.

원뿔의 모선의 길이가 3 이므로 밑면의 둘레의 길이 $l = 12 - 2 \times 3 = 6$ 이다.

따라서 (밑면의 둘레의 길이) = (밑면의 반지름의 길이 $\times 2 \times \pi$ 이므로,

밑면의 반지름의 길이는 $\frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$ 이다.

3. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi cm^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AC} = x$cm 이므로 $\overline{BC} = (8-x)$cm 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64-16x+x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{2x^2-16x+64}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x+16-16) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x-4)^2 + 4\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4 cm 일 때, 넓이는 최댓값 4π cm 를 갖는다.

4. 두 점 A$(2, -2)$, B$(4, 0)$과 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 동점 P에 대하여 $\triangle$ABP의 넓이가 최소일 때의 점 P의 좌표를 (a, b), 그 때의 넓이의 최솟값을 S라 할 때, $a + b + S$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

직선 AB의 방정식은 $y = \frac{0+2}{4-2}(x-4)$

$\therefore y = x - 4$

직선 AB와 평행하면서

$y = \frac{1}{2}x^2$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을

$y = x + k$로 놓으면

$\frac{1}{2}x^2 = x + k$에서

$x^2 - 2x - 2k = 0 \cdots ㉠$

$\frac{D}{4} = 1 + 2k = 0 \qquad \therefore k = -\frac{1}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0 \qquad \therefore x = 1$

즉, 점 P의 좌표는 $(1, \frac{1}{2})$이고

그 때의 $\triangle$ABP의 높이를 h라 하면

이 높이는 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$과 직선AB ,

즉, $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리이므로

$h = \frac{\left|1 - \frac{1}{2} - 4\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{4}\sqrt{2}$

이 때,

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(4-2)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{2}$이므로

$S = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{7}{4}\sqrt{2} = \frac{7}{2}$

$\therefore a + b + S = 5$

5. 구입 가격이 1kg 에 2000 원인 돼지고기를 1kg 에 3000 원씩 판매하면 하루에 100kg 을 팔 수 있으며 1kg 에 10 원씩 판매 가격을 내릴 때마다 판매량이 3kg 씩 증가하고 1kg 에 10 원씩 판매 가격을 올릴 때마다 판매량이 3kg 씩 감소한다고 한다.
1kg 에 p 원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p 의 값을 구하면? (단, 판매가격은 10 원 단위로만 인상 또는 인하 할 수 있다.)

① 2600 원　② 2670 원　③ 2700 원
④ 2750 원　⑤ 2800 원

해설

3000 원에서 $10x$ 원 가격을 내렸을 때
1kg 의 판매가격은 $3000-10x$
1 일 판매량은 $100+3x$
따라서 하루의 이익 P 는

$$\begin{aligned} P &= (3000-10x)(100+3x)-2000(100+3x) \\ &= (1000-10x)(100+3x) \\ &= -30x^2+2000x+100000 \\ &= -30\left(x^2-\frac{200}{3}x\right)+100000 \\ &= -30\left(x-\frac{100}{3}\right)^2+\frac{400000}{3} \end{aligned}$$

x가 문제에서 정수이므로 $x=33$ 일 때 최대이다.
따라서 $3000-330=2670$(원)

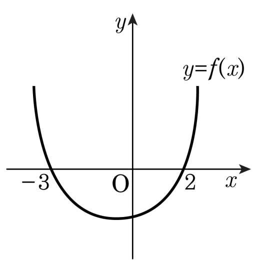
6. 길이가 80 m 인 끈으로 목장의 경계를 직사각형 모양으로 표시하려고 한다. 목장의 넓이를 최대로 하려면 이 울타리의 가로의 길이는 몇 m 로 정해야 하는가?

① 10 m ② 20 m ③ 30 m ④ 40 m ⑤ 50 m

해설

가로의 길이를 x m 라 하면 세로의 길이는 $(40 - x)$ m 이므로
목장의 넓이를 y m^2 라 하면
$y = x(40 - x) = -x^2 + 40x = -(x - 20)^2 + 400 \cdots\cdots$ ㉠
이 때, $0 < x < 40$ 이므로 ㉠은 $x = 20$ 일 때 최대이고 최댓값은 400 이다.
따라서, 목장의 넓이를 최대로 하려면 울타리의 가로의 길이는 20 m 로 해야 한다

7. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

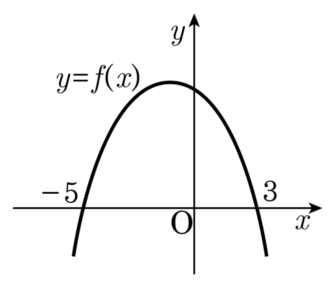


① 1 개　② 2 개　③ 3 개
④ 4 개　⑤ 5 개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3)=0,\ f(2)=0$ 이므로
방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 근은
(i) $x^2-1=-3$ 일 때, $x^2=-2$ $\therefore\ x=\pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2-1=2$ 일 때, $x^2=3$ $\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

8. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

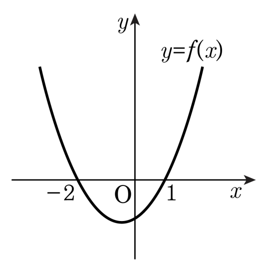
$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

9. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3　　② -2　　③ -1

④ 0　　⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
$y=f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y=f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$
$\therefore a=-3$

10. 합이 12 인 두 수 x , $12-x$ 가 있다. 두 수의 곱을 y 라 할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 36

해설

$y = x(12-x) = -x^2 + 12x = -(x^2 - 12x + 36) + 36$

$y = -(x-6)^2 + 36$

11. 이차방정식 $x^2 + (a+1)x + a + 1 = 0$의 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$의 값이 최소일 때, 상수 a의 값은?

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $-\frac{1}{4}$　　④ 0　　⑤ 3

해설

$x^2 + (a+1)x + a + 1 = 0$이 실근을 가지므로
$D = (a+1)^2 - 4(a+1) \geq 0$, $(a+1)(a-3) \geq 0$
$\therefore a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$
한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -(a+1)$, $\alpha\beta = a + 1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta &= (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta \\ &= (a+1)^2 - (a+1) \\ &= a^2 + a = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

이때, $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이므로
$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ 는 $a = -1$일 때 최솟값을 갖는다.

12. $x^2 - 2x - y = 0$ 일 때, $3x^2 - 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 2x - y = 0$ 에서 $y = x^2 - 2x$
이 식을 $3x^2 - 2y$ 에 대입하면
$3x^2 - 2(x^2 - 2x) = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$
따라서, $x = -2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

13. 실수 x, y 가 방정식 $x^2+2xy+2y^2+y-6=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2+2yx+2y^2+y-6=0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=y^2-(2y^2+y-6)\ge 0$

$y^2+y-6\le 0$, $(y+3)(y-2)\le 0$

$\therefore -3\le y\le 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

14. $x^2 + y^2 = 5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x - y$는 $x = \alpha, y = \beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x - y = k$로 놓으면
$y = 2x - k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2 + y^2 = 5$에 대입하면
$x^2 + (2x - k)^2 = 5$
$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5)\ 0$, $k^2 \le 25$
$\therefore -5 \le k \le 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y의 값은
㉡에서 $5x^2 - 20x + 20 = 0$, $5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$
㉠에서 $y = 4 - 5 = -1$
따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$이므로
$m + \alpha + \beta = 6$

15. x 가 실수일 때, 함수 $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 3}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 3} = k$ 라 하면

$x^2 + 4x - 1 = k(x^2 - 2x + 3)$

$(k - 1)x^2 - (2k + 4)x + 3k + 1 = 0$

$D/4 = (k + 2)^2 - (k - 1)(3k + 1) \geq 0$

$-2k^2 + 6k + 5 \geq 0$

근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은
3 이다.