1. 둘레의 길이가 24 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 12 cm

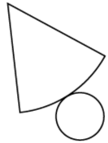
해설

반지름 x cm , 호의 길이를 $(24-2x)$ cm 라 두면

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\
&= x(12-x) \\
&= -x^2+12x \\
&= -(x^2-12x+36)+36 \\
&= -(x-6)^2+36
\end{aligned}
$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 6 cm 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 36 cm^2 를 가진다.
따라서 호의 길이는 $24-2x=12$ cm 이다.

2. 다음 그림은 원뿔을 전개한 것이다. 전개도 중 부채꼴 부분의 둘레의 길이가 12 이다. 부채꼴 부분의 넓이가 최대일 때, 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{3}{\pi}$

해설

부채꼴의 반지름(원뿔에서의 모선)의 길이를 r , 호의 길이(원뿔의 밑면의 둘레의 길이)를 l 이라고 하면

$2r + l = 12$, $l = 12 - 2r$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(12 - 2r) \\ &= -r^2 + 6r \\ &= -(r - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

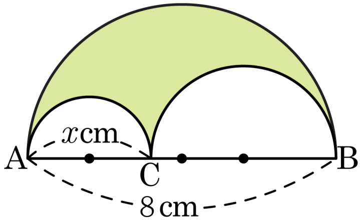
따라서 부채꼴 부분의 반지름이 3 일 때, 넓이가 최대가 된다.

원뿔의 모선의 길이가 3 이므로 밑면의 둘레의 길이 $l = 12 - 2 \times 3 = 6$ 이다.

따라서 (밑면의 둘레의 길이) $=$ (밑면의 반지름의 길이 $\times 2 \times \pi$ 이므로,

밑면의 반지름의 길이는 $\dfrac{6}{2\pi} = \dfrac{3}{\pi}$ 이다.

3. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\text{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AC} = x\text{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (8 - x)\text{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64 - 16x + x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{2x^2 - 16x + 64}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 8x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 8x + 16 - 16) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x - 4)^2 + 4\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4 cm 일 때, 넓이는 최댓값 4π cm 를 갖는다.

4. 두 점 $A(2,-2)$, $B(4,0)$과 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 동점 P에 대하여 $\triangle ABP$의 넓이가 최소일 때의 점 P의 좌표를 (a,b), 그 때의 넓이의 최솟값을 S라 할 때, $a+b+S$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

직선 AB의 방정식은 $y=\frac{0+2}{4-2}(x-4)$

$\therefore y=x-4$

직선 AB와 평행하면서

$y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을

$y=x+k$로 놓으면

$\frac{1}{2}x^2=x+k$에서

$x^2-2x-2k=0 \cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=1+2k=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

즉, 점 P의 좌표는 $(1,\frac{1}{2})$이고

그 때의 $\triangle ABP$의 높이를 h라 하면

이 높이는 점 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$과 직선AB ,

즉, $x-y-4=0$ 사이의 거리이므로

$$h=\frac{\left|1-\frac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{7}{4}\sqrt{2}$$

이 때,

$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$이므로

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{7}{4}\sqrt{2}=\frac{7}{2}$$

$\therefore a+b+S=5$

5. 구입 가격이 1kg에 2000원인 돼지고기를 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 100kg을 팔 수 있으며 1kg에 10원씩 판매 가격을 내릴 때마다 판매량이 3kg씩 증가하고 1kg에 10원씩 판매 가격을 올릴 때마다 판매량이 3kg씩 감소한다고 한다.
1kg에 p원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p의 값을 구하면? (단, 판매가격은 10원 단위로만 인상 또는 인하 할 수 있다.)

① 2600원 ② 2670원 ③ 2700원
④ 2750원 ⑤ 2800원

해설

3000원에서 $10x$원 가격을 내렸을 때
1kg의 판매가격은 $3000-10x$
1일 판매량은 $100+3x$
따라서 하루의 이익 P는

$$\begin{aligned} P &= (3000-10x)(100+3x)-2000(100+3x) \\ &= (1000-10x)(100+3x) \\ &= -30x^2+2000x+100000 \\ &= -30\left(x^2-\frac{200}{3}x\right)+100000 \\ &= -30\left(x-\frac{100}{3}\right)^2+\frac{400000}{3} \end{aligned}$$

x가 문제에서 정수이므로 $x=33$일 때 최대이다.
따라서 $3000-330=2670$(원)

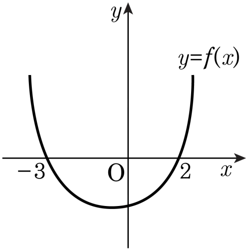
6. 길이가 80 m 인 끈으로 목장의 경계를 직사각형 모양으로 표시하려고 한다. 목장의 넓이를 최대로 하려면 이 울타리의 가로의 길이는 몇 m 로 정해야 하는가?

① 10 m ② 20 m ③ 30 m ④ 40 m ⑤ 50 m

해설

가로의 길이를 x m 라 하면 세로의 길이는 $(40-x)$ m 이므로
목장의 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$ 라 하면
$y=x(40-x)=-x^2+40x=-(x-20)^2+400\cdots\cdots$ ㉠
이 때, $0<x<40$ 이므로 ㉠은 $x=20$ 일 때 최대이고 최댓값은 400 이다.
따라서, 목장의 넓이를 최대로 하려면 울타리의 가로의 길이는 20 m 로 해야 한다

7. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 5개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3)=0,\ f(2)=0$ 이므로

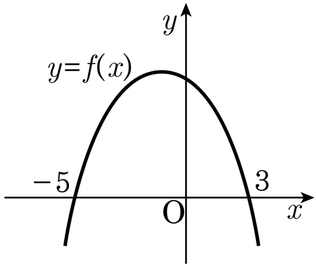
방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 근은

(i) $x^2-1=-3$ 일 때, $x^2=-2 \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2-1=2$ 일 때, $x^2=3 \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

8. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

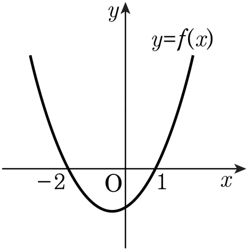
$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

9. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a = 5$

$\therefore a = -3$

10. 합이 12 인 두 수 x , $12 - x$ 가 있다. 두 수의 곱을 y 라 할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

$$y = x(12 - x) = -x^2 + 12x = -(x^2 - 12x + 36) + 36$$
$$y = -(x - 6)^2 + 36$$

11. 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a+1=0$의 두 실근 α,β에 대하여 $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$의 값이 최소일 때, 상수 a의 값은?

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ 0　⑤ 3

해설

$x^2+(a+1)x+a+1=0$이 실근을 가지므로

$D=(a+1)^2-4(a+1)\geq 0,\ \ (a+1)(a-3)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a+1),\ \ \alpha\beta=a+1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta &= (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\\ &= (a+1)^2-(a+1)\\ &= a^2+a=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이때, $a\leq -1$ 또는 $a\geq 3$ 이므로

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ 는 $a=-1$일 때 최솟값을 갖는다.

12. $x^2-2x-y=0$ 일 때, $3x^2-2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2-2x-y=0$ 에서 $y=x^2-2x$
이 식을 $3x^2-2y$ 에 대입하면
$3x^2-2\left(x^2-2x\right)=x^2+4x=(x+2)^2-4$
따라서, $x=-2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

13. 실수 x, y 가 방정식 $x^2+2xy+2y^2+y-6=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2+2yx+2y^2+y-6=0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=y^2-\left(2y^2+y-6\right)\geq 0$$

$y^2+y-6\leq 0$, $\ (y+3)(y-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq y\leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

14. $x^2+y^2=5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x-y$는 $x=\alpha, y=\beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m+\alpha+\beta$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x-y=k$로 놓으면

$y=2x-k \cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x-k)^2=5$

$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \cdots$ ㉡

㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면

x가 실수이므로

$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)\ 0$, $k^2 \le 25$

$\therefore -5 \le k \le 5$

따라서 k의 최댓값은 5이다.

이 때의 x, y의 값은

㉡에서 $5x^2-20x+20=0$, $5(x-2)^2=0\ \therefore x=2$

㉠에서 $y=4-5=-1$

따라서, $m=5, \alpha=2, \beta=-1$이므로

$m+\alpha+\beta=6$

15. x 가 실수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}=k$ 라 하면

$x^2+4x-1=k(x^2-2x+3)$

$(k-1)x^2-(2k+4)x+3k+1=0$

$D/4=(k+2)^2-(k-1)(3k+1)\geq 0$

$-2k^2+6k+5\geq 0$

근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은

3 이다.