

1. 다음 연립방정식의 해를 $x = a, y = b, z = c$ 라 할 때 $12abc$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{3} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{4} \\ \frac{zx}{z+x} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{x+y}{xy} = 3 \text{에서 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3, \frac{y+z}{yz} = 4 \text{에서 } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4, \frac{z+x}{zx} = 5$$

$$\text{에서 } \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 5$$

$$\frac{1}{x} = A, \frac{1}{y} = B, \frac{1}{z} = C \text{로 치환하면}$$

$$A + B = 3, B + C = 4, C + A = 5$$

세 식을 변끼리 더하면

$$2(A + B + C) = 12, A + B + C = 6$$

$$\therefore A = 2, B = 1, C = 3$$

$$\frac{1}{x} = 2 \text{이므로 } x = \frac{1}{2}, \frac{1}{y} = 1 \text{이므로 } y = 1, \frac{1}{z} = 3 \text{이므로 } z = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 12abc = 12 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = 2$$

2. 길이가 8cm 인 테이프와 6cm 인 테이프를 테이프 사이의 간격이 1cm 가 되게 붙여서 모두 52cm 의 색띠를 만들려고 하였다. 그런데 실수로 두 테이프의 개수를 바꾸어서 붙였더니 58cm 의 색띠가 만들어지고 말았다. 원래 붙이려고 했던 8cm 인 테이프와 6cm 인 테이프의 갯수를 각각 차례대로 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

▷ 정답 : 5 개

해설

원래 8cm 길이의 테이프를 x 개, 6cm 길이의 테이프를 y 개 붙이려고 계획했다고 하면

테이프 사이의 간격이 1cm 이므로 총 간격은 $(x+y-1)$ cm 이다.

원래 계획했던 대로 테이프를 붙이면 색띠의 길이는

$$8x + 6y + (x + y - 1) = 52$$

$$\therefore 9x + 7y = 53$$

테이프의 갯수를 바꾸어 붙였을 때 색띠의 길이는

$$6x + 8y + (x + y - 1) = 58$$

$$\therefore 7x + 9y = 59$$

두 식을 연립하여 풀면 $x = 2, y = 5$

따라서 원래 붙이려고 했던 8cm , 6cm 길이의 테이프의 갯수는 각각 2 개, 5 개이다.

3. 서로 다른 농도의 소금물 A, B 가 100g 씩 있다. A 의 절반을 B 에 넣고 잘 섞은 후, 다시 B 의 절반을 A 로 옮겨 섞었더니 A 는 9% 의 소금물, B 는 6% 의 소금물이 되었다. 처음 두 소금물 A, B 의 농도를 구하여라.(단, 농도가 분수인 경우 소수로 나타내시오.)

▶ 답 : %

▶ 답 : %

▷ 정답 : A = 13.5 %

▷ 정답 : B = 2.25 %

해설

소금물 A, B 의 농도를 각각 $a\%$, $b\%$ 라 하면

A 의 절반을 B 에 섞었을 때

A : (소금물의 양) = 50g

$$(\text{소금의 양}) = 50 \times \frac{a}{100} = \frac{a}{2} \text{ (g)}$$

B : (소금물의 양) = 150g

$$(\text{소금의 양}) = \frac{a}{2} + 100 \times \frac{b}{100} = \frac{a}{2} + b \text{ (g)}$$

다시 B 의 절반을 A 에 섞었을 때

A : (소금물의 양) = 50 + 75 = 125 (g)

$$(\text{소금의 양}) = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + b \right) = \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b \text{ (g)}$$

$$(\text{농도}) = \frac{\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b}{125} \times 100 = 9$$

$$\therefore 3a + 2b = 45 \cdots \textcircled{1}$$

B : (소금물의 양) = 75g

$$(\text{소금의 양}) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + b \right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} \text{ (g)}$$

$$(\text{농도}) = \frac{\frac{a}{4} + \frac{b}{2}}{75} \times 100 = 6$$

$$\therefore a + 2b = 18 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{27}{2} = 13.5 \text{ (}\%), \quad b = \frac{9}{4} = 2.25 \text{ (}\%)$$

4. A 공장에서는 장난감 로봇을 만들어 판매하고 있다. 장난감 로봇을 만드는데 드는 비용은 장난감 로봇이 만들어지는 개수에 따라 다음의 규칙과 같이 달라진다.

- ㉠ 장난감로봇의 개수에 관계없이 기본적으로 드는 비용 : 개당 원가는 100 원
- ㉡ 장난감로봇의 개수가 1000 개 초과 3000 개 이하일 때 : 1000 개 초과될 때부터 초과되는 개수에 대해 100 개 당 a 원씩 원가가 줄어든다.
- ㉢ 장난감로봇의 개수가 3000 개 초과할 때 : 3000 개 초과될 때부터 초과되는 개수에 대해 200 개 당 b 원씩 원가가 줄어든다.

장난감로봇을 2500 개 만드는데 든 비용은 235000 원이고 4000 개 만드는데 든 비용은 367500 원이라고 할 때, a 와 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 : 원

▶ 답 : 원

▷ 정답 : $a = 1000$ 원

▷ 정답 : $b = 2500$ 원

해설

2500 개 만드는데 든 비용이 235000 원이므로

$$1000 \times 100 + 1500 \times 100 - \frac{1500}{100} \times a = 235000$$

$$\therefore a = 1000 \text{ (원)}$$

4000 개 만드는데 든 비용이 367500 원이므로

$$1000 \times 100 + \left(2000 \times 100 - \frac{2000}{100} \times 1000 \right)$$

$$+ \left(1000 \times 100 - \frac{1000}{200} \times b \right) = 367500$$

$$\therefore b = 2500$$

5. 은행에 일정한 금액의 돈을 맡긴 후 매달 똑같은 액수의 돈을 찾기로 하였다. 돈을 찾는 방식은 다음과 같다.
 첫 달은 1000 원을 찾고 그 나머지의 10% 를 찾는다.
 둘째 달은 2000 원을 찾고 저축한 금액에서 첫째 달에 찾은 금액을 뺀 나머지의 10% 를 찾는다.
 셋째 달은 3000 원을 찾고 저축한 금액에서 그 전달까지 찾은 금액을 뺀 나머지의 10% 를 찾는다.
 ...
 이런 방식으로 돈을 찾는다고 할 때 매달 찾는 금액은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 9000 원

해설

매달 찾는 금액을 x , 저축한 금액을 y 라 하면

$$\text{첫 달 : } x = 1000 + 0.1(y - 1000) \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\text{둘째 달 : } x = 2000 + 0.1(y - x - 2000) \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\text{셋째 달 : } x = 3000 + 0.1(y - 2x - 3000)$$

...

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$x = 9000$$

따라서 매달 찾는 금액은 9000 원이다.

6. 어느 상점에서 어떤 상품을 사서 구입 가격의 30%의 이익을 붙여 정가로 판매하였더니, 기대했던 것보다 잘 팔리지 않아서 상품이 60개 남았을 때부터 정가의 20%를 할인하여 팔다가 10권이 남고, 이익이 1950원이었다. 이 상점에서 한 번 더 같은 상품을 같은 가격, 수량으로 들여왔을 때, 이번에는 20%의 이익을 붙인 후, 정가로 판매하여 10권이 남았을 때의 이익이 2100원이었다. 상점에서 이 상품을 구입하는데 든 금액의 총합을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 19500 원

해설

상품 한 개의 가격을 x 원, 구입한 개수를 y 개라 하면

$$1.3x \times (y - 60) + 1.3x \times 0.8 \times 50 - xy = 1950 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$1.2x \times (y - 10) - xy = 2100 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 0.3xy - 26x = 1950 \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } 0.2xy - 12x = 2100 \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{을 연립하여 풀면 } x = 150$$

$$\textcircled{㉣} \text{에 대입하면 } y = 130$$

따라서 상점에서 상품을 구입하는 데 든 금액의 총합은 $150 \times 130 = 19500$ (원)

7. A 와 B 가 동시에 6일간 작업하면 끝마칠 수 있는 일이 있다. 이 일을 먼저 A 가 5일간 작업한 뒤 A 와 B 가 같이 3일간 작업해서 끝마쳤다. B 가 혼자서 일을 끝마치려면 며칠이 걸리겠는지 구하여라.

▶ 답 : 일

▷ 정답 : 15 일

해설

하루에 A, B 가 할 수 있는 일의 양을 각각 x, y 라고 하면

$$\begin{cases} 6(x+y) = 1 \\ 5x + 3(x+y) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 6y = 1 \\ 8x + 3y = 1 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $x = \frac{1}{10}$, $y = \frac{1}{15}$ 이다.

$$\therefore A : 1 \div \frac{1}{10} = 10(\text{일}), B : 1 \div \frac{1}{15} = 15(\text{일})$$

8. 고개의 동서쪽으로 집과 학교가 있다. 집에서 고개 정상까지는 4km, 고개 정상에서 학교까지는 10km 라고 한다. 유진이가 집에서 학교까지 갈 때는 3 시간, 학교에서 다시 집까지 되돌아 올 때는 4 시간이 걸렸다. 내리막길에서의 속력을 구하여라. (단, 오르막길과 내리막길에서의 속력은 각각 일정하다.)

▶ 답 : km/h

▷ 정답 : 6 km/h

해설

오르막길의 속력을 x km/h, 내리막길의 속력을 y km/h 라 하면

$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{10}{y} = 3 \\ \frac{10}{x} + \frac{4}{y} = 4 \end{cases}$$

$\frac{1}{x} = A, \frac{1}{y} = B$ 라고 치환하면

$$\begin{cases} 4A + 10B = 3 & \cdots \textcircled{㉠} \\ 10A + 4B = 4 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하여 방정식을 풀면

$$A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } x = 3, \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \text{ 이므로 } y = 6$$

따라서 내리막길의 속력은 6km/h 이다.

9. 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{a}$ 에 대하여, $f^2 = f(f(x)) = 1 - \frac{1}{f(x)}$, $f^3 = f(f^2(x)) = 1 - \frac{1}{f^2(x)}$ 로 정의한다. $f^{99}(a) = \frac{1}{3}$ 일 때, $f^{199}(a)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

$$f^{99}(a) = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$f^{100}(a) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{3}} = -2,$$

$$f^{101}(a) = 1 - \frac{1}{-2} = \frac{3}{2},$$

$$f^{102}(a) = 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}} \equiv \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

$-2, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}$ 의 값을 순환한다.

$$100 \div 3 = 33 \cdots 1$$

$$199 \div 3 = 66 \cdots 1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore f^{199}(a) = f^{100}(a) = -2$$

10. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0) = 5$, $f(200) = f(-200)$ 이 성립할 때, $f(1)$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(x) = ax + b$ 라 놓으면

$$f(0) = b = 5,$$

$$f(200) = 200a + b = -200a + b = f(-200) \text{ 이므로 } a = 0$$

$$\therefore f(x) = 5$$

따라서 $f(1) = 5$ 이다.

11. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프가 $y = 2x + 4$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$y = ax + b$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로

$$y = a(x + 2) + b - 3 = ax + 2a + b - 3$$

이것이 $y = 2x + 4$ 의 그래프와 일치하므로 $a = 2$

$$2a + b - 3 = 4 \text{ 에서 } b = 3$$

$$\therefore a + b = 5$$

12. 일차함수 $y = ax$ 의 그래프를 y 축 방향으로 3만큼 평행 이동한 그래프와 일차함수 $y = x + 6a$ 가 x 축 위에서 서로 만난다. $2a^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = ax$ 의 그래프를 y 축 방향으로 3만큼 평행 이동한 그래프는 $y = ax + 3$ 이고

이 함수의 x 절편은 $-\frac{3}{a}$ 이다.

그리고 $y = x + 6a$ 의 x 절편은 $-6a$ 인데 두 함수의 x 절편이 같으므로

$$-6a = -\frac{3}{a}$$

$$6a^2 = 3$$

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 2a^2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

13. 일차함수 $y = 3x + 2$, $y = ax + 6$ ($a < 0$)의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{16}{9}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$

해설

두 일차함수의 교점의 x 좌표를 k 라 하면

$$(6 - 2) \times k \times \frac{1}{2} = \frac{16}{9}$$

$$2k = \frac{16}{9} \quad \therefore x = \frac{8}{9}$$

두 그래프가 만나는 점의 x 좌표는 $\frac{8}{9}$ 이다.

$y = 3x + 2$ 에 $x = \frac{8}{9}$ 을 대입하면

$$y = 3 \times \frac{8}{9} + 2 \quad \therefore y = \frac{14}{3}$$

$y = ax + 6$ 에 점 $\left(\frac{8}{9}, \frac{14}{3}\right)$ 를 대입하면

$$\frac{14}{3} = \frac{8}{9}a + 6$$

$$-\frac{8}{9}a = \frac{4}{3} \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$$

14. 일차함수 $y = (2k - 3)x - 8k + 1$ 의 그래프가 제 2, 3, 4사분면을 지나기 위한 k 값을 $a < k < b$ 라고 할 때, $b \div a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

제 2, 3, 4사분면을 지나려면 오른쪽 아래를 향하고 음의 y 절편 값을 가지므로

$2k - 3 < 0$, $-8k + 1 < 0$ 이어야 한다.

그러므로 $\frac{1}{8} < k < \frac{3}{2}$ 이고, $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $b \div a = \frac{3}{2} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$ 이다.

15. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프를 그릴 때, a 를 잘못 보고 그린 직선은 두 점 $(0, 2)$, $(4, 3)$ 을 지났고, b 를 잘못 보고 그린 직선은 $y = -\frac{2}{3}x + 6$ 이라는 직선과 수직으로 만났다. 이때 정확한 a , b 의 값에 대하여 ab 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 점 $(0, 2)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선은 $y = \frac{1}{4}x + 2$ 이고 a 를 잘못 보았으므로

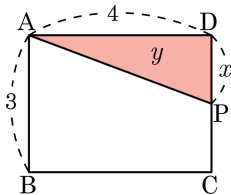
$$\therefore b = 2$$

$y = -\frac{2}{3}x + 6$ 이라는 직선과 수직으로 만나는 직선은 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이고 b 를 잘못 보았으므로

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore ab = 3$$

16. 다음 그림의 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AD} = 4$ 이고, 점 P가 D를 출발하여 C, B, A 순서로 A까지 움직인다. 움직인 거리를 x , $\triangle ADP$ 의 넓이를 y 라 하고 y 를 x 의 식으로 나타내어 그 관계식의 그래프를 좌표평면 위에 그렸을 때, 이 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 42

해설

$$0 \leq x \leq 3 : y = 2x$$

$$3 \leq x \leq 7 : y = 6$$

$$7 \leq x \leq 10 : y = (10 - x) \times 2 = 20 - 2x$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times (10 + 4) = 42$$

17. 어느 회사의 미국 통화 요금은 기본 30 초까지는 통화 시간에 관계없이 200 원을 부과하고, 이후 초과되는 통화시간에 대해 초당 10 원을 부과한다. 통화 시간을 x 초, 요금을 y 원로 하는 식을 좌표평면의 그래프로 나타낼 때, 이 그래프와 x 축, $x = 120$ 이 이루는 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64500

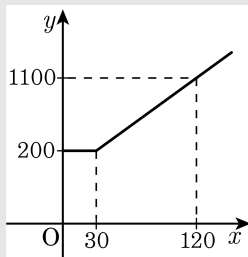
해설

(1) $0 \leq x \leq 30$ 일 때, $y = 200$

(2) $x > 30$ 일 때, $y = 200 + 10(x - 30)$

$\therefore y = 10x - 100$

이 그래프와 x 축과 $x = 120$ 이 이루는 도형은 다음과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $30 \times 200 + \frac{1}{2} \times \{(200 + 1100) \times 90\} = 64500$ 이다.

18. 좌표평면 위에 네 점 $A(3, 5)$, $B(0, a)$, $C(3, 0)$, $D(6, a)$ 가 있을 때, 점 A 에서 B, C 를 거쳐 D 까지의 거리가 최소일 때, 사각형 ABCD 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

점 A 를 y 축에 대하여 대칭인 점을 $A'(-3, 5)$,

점 D 와 x 축에 대하여 대칭인 점을 $D'(6, -a)$ 라 할 때, $\overline{AB} = \overline{A'B}$, $\overline{CD} = \overline{CD'}$ 이고

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CD'} \geq \overline{A'D'}$$

이므로 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ 의 길이가 최소가 되려면 점 A' , B, C, D' 가 일직선 위에 있어야 한다.

$$\frac{a-5}{0-(-3)} = \frac{-a-0}{6-3} \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

따라서 사각형 ABCD 의 넓이는

(삼각형 ABC의 넓이) + (삼각형 ACD의 넓이)

$$\text{이므로 } \frac{1}{2} \times 5 \times 3 + \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 15 \text{ 이다.}$$

19. 직선 $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ 과 직선 $\frac{a}{5}x + \frac{b}{3}y = 1$ 이 평행하고 점 (a, b) 는 직선 $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ 위의 점일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{15}{4}$

해설

$$\text{평행일 조건 : } \frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{a}{5}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{b}{3}\right)} \neq \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b}, a = b$$

$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ 에 점 (a, b) 를 대입하면

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{3} = 1$$

$$\frac{3a + 5b}{15} = 1, 3a + 5b = 15$$

$a = b$ 이므로 $3a + 5a = 15$ 에서 $8a = 15$

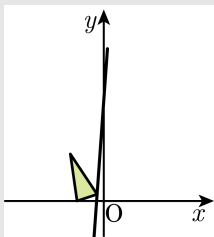
$$\therefore a = b = \frac{15}{8}, a + b = \frac{15}{4}$$

20. 일차함수 $y = ax + 15$ 의 그래프가 세 점 $(-5, 7)$, $(-1, 1)$, $(-4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 만날 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설



그림과 같이 a 는 일차함수 $y = ax + 15$ 의 그래프가 $(-1, 1)$ 를 지날 때 최댓값을 가지므로

$y = ax + 15$ 에 $x = -1$, $y = 1$ 을 대입하면

$1 = -a + 15$ 이다. $\therefore a = 14$

따라서 a 의 최댓값은 14 이다.