1. 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ 의 해가 $x=a,\ y=b,\ z=c$ 일 때, $5a+b-c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$\dfrac{1}{x}=X,\ \dfrac{1}{y}=Y,\ \dfrac{1}{z}=Z$ 라고 하면

$$\begin{cases} X+Y=\dfrac{1}{2} \\ Y+Z=\dfrac{1}{3} \\ Z+X=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$2(X+Y+Z)=\frac{3}{2}$$

$$X+Y+Z=\frac{3}{4}$$

$$X=\frac{5}{12},\ Y=\frac{1}{12},\ Z=\frac{1}{4},$$

$$x=\frac{12}{5},\ y=12,\ z=4,$$

$$5a+b-c=12+12-4=20$$

2. 연립방정식 $x+y=y-x-2=5$을 만족하는 x, y에 대하여 x^2+xy+y^2의 값은?

① 13 ② 15 ③ 21 ④ 28 ⑤ 31

해설

$x+y=y-x-2=5$을
연립하여 풀면 $x=-1$, $y=6$
$\therefore\ x^2+xy+y^2=1-6+36=31$

3. $f(x,y)$ 에 대하여 $xy > 0$ 이면 $f(x,y) = x + y$ 이고 $xy < 0$ 이면 $f(x,y) = x - y$로 정의한다. 연립방정식 $3x + 2y - f(x,y) = -3, 4x - 2y + f(x,y) = -1$ 의 해를 구하여라.(단, $xy \neq 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -\frac{4}{7}$

▷ 정답 : $y = -\frac{13}{7}$

해설

1)$xy > 0$ 일 때, $f(x,y) = x + y$ 이므로
주어진 연립방정식은
$3x + 2y - (x + y) = -3, 4x - 2y + x + y = -1$ 에서 $2x + y = -3, 5x - y = -1$
$\therefore x = -\frac{4}{7}, y = -\frac{13}{7}$($xy > 0$ 의 조건을 충족시킨다.)
2)$xy < 0$ 일 때, $f(x,y) = x - y$ 이므로
주어진 연립방정식은
$3x + 2y - (x - y) = -3, 4x - 2y + x - y = -1$ 에서 $2x + y = -3, 5x - 3y = -1$
$\therefore x = -\frac{10}{11}, y = -\frac{13}{11}$($xy < 0$ 의 조건을 충족시키지 못한다.)
1), 2) 에 의하여 구하려는 해는 $x = -\frac{4}{7}, y = -\frac{13}{7}$

4. 연립방정식 $0.3\left(\frac{x+y}{8}\right) = \frac{x-y}{4} - 1 = \frac{3}{2}$ 을 풀어라.

▶ **답 :** $\underline{x =}$ 25

▶ **답 :** $\underline{y =}$ 15

▷ **정답 :** $\underline{x =}$ 25

▷ **정답 :** $\underline{y =}$ 15

해설

$$\begin{cases} 0.3\left(\frac{x+y}{8}\right) = \frac{3}{2} \\ \frac{x-y}{4} - 1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{8} = \frac{3}{2} \times \frac{10}{3} \\ x - y - 4 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rr} & x+y=40 \\ +) & x-y=10 \\ \hline & 2x=50 \end{array}$$

$\therefore x = 25$

$\therefore y = 15$

5. 연립방정식 $\begin{cases} 3xy+2yz+zx=9xyz \\ xy+3yz-2zx=10xyz \\ 5xy+4yz-3zx=25xyz \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 라 할 때 $6abc$ 의 값을 구하여라. (단, $xyz \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 식의 양변을 xyz로 나누면

$\frac{3}{z}+\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=9$, $\frac{1}{z}+\frac{3}{x}-\frac{2}{y}=10$, $\frac{5}{z}+\frac{4}{x}-\frac{3}{y}=25$

$\frac{1}{x}=X$, $\frac{1}{y}=Y$, $\frac{1}{z}=Z$ 라 하면

$$\begin{cases} 3Z+2X+Y=9 & \cdots ㉠ \\ Z+3X-2Y=10 & \cdots ㉡ \\ 5Z+4X-3Y=25 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ $\times 2+$ ㉡하면 $7Z+7X=28 \quad \cdots$ ㉣

㉠ $\times 3+$ ㉢하면 $14Z+10X=52 \cdots$ ㉤

㉣, ㉤를 연립하여 풀면 $X=1, Z=3$

따라서 $Y=-2$,

$X=\frac{1}{x}$, $Y=\frac{1}{y}$, $Z=\frac{1}{Z}$ 이므로

$x=1$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{3}$

$\therefore\ 6abc=\ -1$

6. 연립방정식 $\begin{cases} 0.4x + 3ay = 12 \\ -\frac{1}{2}bx + 1.5y = 20 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{2}{5}$

해설

$$\frac{0.4}{-\frac{1}{2}b} = \frac{3a}{1.5} = \frac{12}{20}$$

$$-\frac{4}{5b} = 2a = \frac{3}{5}$$

$$a = \frac{3}{10},\ b = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore ab = -\frac{2}{5}$$

7. 학생 50 명이 유원지에 있는 세 종류의 놀이배에 나누어 탔다. 5 명 정원인 배는 500 원, 3 명 정원인 배는 350 원, 1 명 정원인 배는 150 원의 요금을 받을 때, 학생들이 빠짐없이 다 타고, 모든 배가 정원을 채웠을 때, 요금의 합은 5350 원이었다. 학생들이 탄 놀이배는 모두 몇 대인지 구하여라.

▶ 답 : 대

▷ 정답 : 14대

해설

5 명 정원인 배의 대수를 x대, 3 명 정원인 배의 대수를 y대, 1 명 정원인 배의 대수를 z대라 하면

$5x + 3y + z = 50 \cdots$ ㉠

$500x + 350y + 150z = 5350$, $10x + 7y + 3z = 107 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $y + z = 7$

$\therefore\ (y,\ z) = (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$

이때, $x,\ y,\ z$ 는 자연수이므로 $x = 7, y = 4, z = 3$

따라서 놀이배는 모두 $7 + 4 + 3 = 14$(대) 이다.

8. 지성, 경희, 찬호 세 사람은 놀이동산의 놀이기구 이용요금을 일정한 비율로 부담하기로 하였다. ㉠ 놀이기구는 $2:3:4$ 의 비율로 부담하고, ㉡ 놀이기구는 $1:3:3$ 의 비율로 부담하기로 하였다. 지성은 이 비율에 따라 3500 원을 부담하였고 찬호는 8200 원을 부담하였을 때, 경희가 부담한 금액을 구하여라.

▶ **답 :** ______ 원

▷ **정답 :** 7050 원

해설

지성, 경희, 찬호 세 사람이 ㉠ 놀이기구를 이용하기 위해 부담한 금액을 각각 $2m$ 원, $3m$ 원, $4m$ 원 이라 하고, ㉡ 놀이기구를 이용하기 위해 부담한 금액을 n 원, $3n$ 원, $3n$ 원 이라 하면

지성이 부담한 금액은 $2m+n=3500$

찬호가 부담한 금액은 $4m+3n=8200$

두 식을 연립하여 풀면

$m=1150,\ n=1200$

따라서 경희가 부담한 금액은

$3m+3n=3\times1150+3\times1200=7050$ (원)

9. 댐으로부터 물을 받아 주변의 논에 물을 대는 작은 저수지가 있다. 이 저수지에는 현재 A 톤 의 물이 들어있고 매일 댐으로부터 받는 물의 양은 2 톤 이다. 이 저수지에서 주변 20 군데의 논에 하루에 0.2 톤 씩 물을 공급하면 5 일 만에 저수지의 물이 모두 공급된다. 댐으로부터 받는 물의 양을 100% 늘리고 논으로 공급하는 물의 양을 25% 줄이면 5 일 동안 몇 군데의 논에 물을 공급할 수 있는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

20 군데의 논에 5 일 동안 물의 공급이 가능하므로

$A + 5 \times 2 = 20 \times 0.2 \times 5 \qquad \therefore\ A = 10$

댐으로부터 공급받는 물의 양을 늘렸을 경우에는 공급받는 물의 양이 100% 증가해서 4 톤 이 되고 한군데의 논에 하루 동안 공급해주는 물의 양은 0.15 톤 이 된다.

$10 + 5 \times 4 = x \times 0.15 \times 5 \qquad \therefore\ x = 40$

따라서 40 군데의 논에 물을 공급할 수 있다.

10. 집에서 학교까지 갈 때, 시속 8km 로 가면 예정 시간보다 15 분 일찍 도착하고, 시속 5km 로 가면 예정 시간보다 30 분 늦게 도착한다고 한다. 이때, 집과 학교까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 : ______ km

▷ 정답 : 10 km

해설

집과 학교 사이의 거리를 x (km),
예정 시간을 y 시간이라 하면

$$\begin{cases} \frac{x}{8} = y - \frac{15}{60} \\ \frac{x}{5} = y + \frac{30}{60} \end{cases} \text{에서} \begin{cases} x = 8y - 2 & \cdots ㉠ \\ 2x = 10y + 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하여 방정식을 풀면

$x = 10,\ y = \frac{3}{2}$

따라서 집과 학교 사이의 거리는 10km 이다.

11. 밑면의 가로, 세로의 길이가 각각 $3\mathrm{cm}, 4\mathrm{cm}$ 이고, 높이가 $12\mathrm{cm}$ 인 직육면체 위의 한 점 A 에서 가장 먼 점 B 까지의 직선거리는 $13\mathrm{cm}$ 이다. 점 P 는 점 A 에서 출발하여 $2\mathrm{cm/s}$ 의 속도로 대각선 AB 를 왕복하고, 점 Q 는 $2\mathrm{cm/s}$ 의 속도로 점 A 에서 출발하여 모서리를 따라 최단거리로 점 B 까지 간 후, 다시 최단거리로 되돌아오기를 반복한다. 두 점이 처음으로 점 B 에서 만나는 것은 출발한 지 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿ 초

▷ 정답 : 123.5 초

해설

점 P 는 $13\mathrm{cm}$ 의 거리를 $2\mathrm{cm/s}$ 의 속도로 왕복하고
점 Q 는 $3+4+12=19\mathrm{cm}$ 의 거리를 $2\mathrm{cm/s}$ 의 속도로 왕복하므로
점 B 에서 만나려면 점 P 와 점 Q 가 이동한 거리가 13 과 19 의 공배수이어야 한다.
따라서 점 B 에서 처음 만날 때까지 점 P 와 점 Q 가 이동한 거리는 13 과 19 의 최소공배수인 $247\mathrm{cm}$ 이다.
점 P 와 점 Q 의 속도는 $2\mathrm{cm/s}$ 로 동일하므로

$$(\text{시간}) = \frac{247}{2} = 123.5 \text{ 초 후이다.}$$

12. 현우는 A 지점에서 출발하여 sm 떨어진 B 지점까지 달리고, 주희는 B 지점에서 동시에 출발하여 A 지점을 향해 달렸다. 두 사람이 중간에 만날 때까지 달린 거리는 현우가 50m 더 길었고, 나머지 거리를 달리는 데 걸린 시간은 현우가 6 초, 주희가 24 초일 때, 두 지점 사이의 거리 s 를 구하여라.

▶ **답 :** ______ m

▷ **정답 :** 150 m

해설

현우와 주희의 속력을 각각 am/s , bm/s 라 하고 중간에서 만난 지점을 M 이라 하면

A 에서 M 까지의 거리는 $24b$, B 에서 M 까지의 거리는 $6a$ 이다.

현우와 주희가 M 까지 걸린 시간이 같으므로

$\frac{24b}{a} = \frac{6a}{b}$ $\therefore 6a^2 = 24b^2$

$\therefore a = 2b (\because a > 0, b > 0) \cdots$ ㉠

또 (A에서 M까지의 거리) − (B에서 M까지의 거리) = 50m 이므로

$24b - 6a = 50 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{25}{3}, b = \frac{25}{6}$

따라서 두 지점 사이의 거리 $s = 24b + 6a = 24 \times \frac{25}{6} + 6 \times \frac{25}{3} =$ 150(m)

13. 세 비커 A, B, C에는 각각 농도가 $x\,\%$, $y\,\%$, $10\,\%$인 소금물이 $100\,\mathrm{g}$씩 들어 있다. 세 비커 A, B, C에서 소금물을 각각 $20\,\mathrm{g}$씩 덜어내어 A의 소금물은 B, B의 소금물은 C, C의 소금물은 A에 넣어서 섞었다. 이 과정을 한 번 더 실행하였더니 A 비커의 소금물의 농도는 $9.24\,\%$, C 비커의 소금물의 농도는 $9\,\%$가 되었다. 이 때, 두 번째 실행 후 B 비커의 소금물의 농도는 몇 %인지 구하여라.

▶ 답 : ____ %

▷ 정답 : 7.76 %

해설

두 번 실행한 후 세 비커 A, B, C의 소금의 양은 다음과 같다.

A 비커 : $\dfrac{\frac{4}{5}x+2}{100}\times 80+\dfrac{8+\frac{1}{5}y}{100}\times 20=9.24\cdots$ ㉠

B 비커 : $\dfrac{\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}y}{100}\times 80+\dfrac{\frac{4}{5}x+2}{100}\times 20\cdots$ ㉡

C 비커 : $\dfrac{8+\frac{1}{5}y}{100}\times 80+\dfrac{\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}y}{100}\times 20=9\cdots$ ㉢

㉠ $\times\,100$ 을 하면 $16x+y=151\cdots$ ㉣

㉢ $\times\,100$ 을 하면 $x+8y=65\cdots$ ㉤

㉣, ㉤ 에서 $x=9,\ y=7$

따라서 $x=9,\ y=7$을 ㉡에 대입하면

B 비커의 소금의 양은 $7.76\,\mathrm{g}$이고 소금물의 양은 $100\,\mathrm{g}$이므로 농도는 $7.76\,\%$이다.

14. 함수 $y = f(x)$가 관계식 $y = (x-2a)(x+2)$로 나타낼 때, $f(2) = 24$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 15 ④ 18 ⑤ 20

해설

$x = 2, y = 24$를 주어진 식에 대입하면

$(2-2a)(2+2) = 24$

$2-2a = 6, a = -2$

따라서 $y = (x+4)(x+2)$가 된다.

$\therefore f(1) = (1+4)(1+2) = 15$

15. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $S(n) = \dfrac{f(p+1)-f(1)}{(-1)\times 1} + \dfrac{f(p+2)-f(2)}{(-1)^2\times 2} + \dfrac{f(p+3)-f(3)}{(-1)^3\times 3} - \cdots + \dfrac{f(p+n)-f(n)}{(-1)^n\times n}$ 라고 정의한다. $S(1)+S(3)+S(5)+\cdots+S(99)=200$ 일 때, $f(x)$ 의 기울기를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{4}{p}$

해설

$S(1) = -f(p+1) + f(1)$

$S(3)$

$= -f(p+1) + f(1) + f(p+2) - f(2) - f(p+3) + f(3)$

$= S(1) - \dfrac{f(p+3)-f(p+2)}{(p+3)-(p+2)} + \dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}$ 에서

$\dfrac{f(p+3)-f(p+2)}{(p+3)-(p+2)} = \dfrac{f(3)-f(2)}{3-2} =$ (기울기) 이므로 $S(3) = S(1)$

같은 방법으로

$S(1) = S(3) = S(5) = S(7) = \cdots = S(99)$ 이다.

$S(1) + S(3) + S(5) + \cdots + S(99) = 50 \times S(1) = 200$ 이므로

$S(1) = 4$

일차함수 $f(x) = ax + b$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(1) &= -f(p+1) + f(1) \\ &= -a(p+1) - b + a + b \\ &= -ap = 4 \end{aligned}$$

$\therefore\ a = -\dfrac{4}{p}$

따라서 $f(x)$ 의 기울기는 $-\dfrac{4}{p}$ 이다.

16. 어떤 일차함수의 그래프가 $(1,\ 3)$, $(-1,\ 7)$, $(a,\ b)$의 세 점을 지난다. 이때, $4a+2b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $4a+2b=10$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으므로

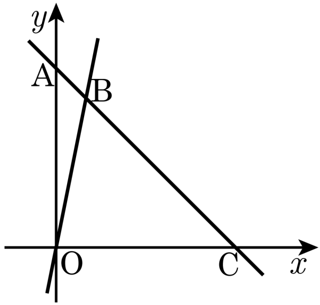
$$\frac{3-7}{1-(-1)}=\frac{b-3}{a-1}$$

$$-2(a-1)=b-3$$

$$2a+b=5$$

$$\therefore\ 4a+2b=2(2a+b)=2\times5=10$$

17. 다음 그림에서 직선 ℓ은 $3x-y=0$의 그래프이다. $\triangle$BOC의 넓이가 54이고 점 C의 좌표가 $(12,\ 0)$일 때, $\triangle$AOB의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$\triangle$BOC의 넓이가 54이므로 점 B의 y좌표는 9

점 B는 직선 $3x-y=0$ 위의 점이므로

$3x-9=0,\ x=3$

따라서, 점 B의 좌표는 $(3,\ 9)$

두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$(\text{기울기})=\frac{0-9}{12-3}=-1$$

$y=-x+b$에 점 $(3,\ 9)$를 대입하면

$9=-3+b,\ b=12$

점 A는 $y=-x+12$의 y절편이므로 $(0,\ 12)$이다.

$$(\text{넓이})=\frac{1}{2}\times 12\times 3=18$$

18. 두 일차함수 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$, $y=ax+6\ (a>0)$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

교점의 x좌표를 $-k$라 하면 $(k>0)$

두 직선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(6-\frac{3}{2}\right)\times k=\frac{9}{2}$에서 $k=2$

즉, 두 직선은 $x=-2$에서 만난다.

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$에 $x=-2$를 대입하면 $y=3$

즉, 교점의 좌표는 $(-2,\ 3)$이다.

이것을 $y=ax+6$에 대입하면

$3=-2a+6$에서 $a=\frac{3}{2}$

19. 일차함수 $(a+2)y=(5-3a)x-3$ 의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a<-2$

해설

$(a+2)y=(5-3a)x-3$ 가 제 3 사분면을 지나지 않으려면 기울기 <0, y절편 >0 이어야 한다.

1) $a=-2$ 일 때,

$x=\dfrac{3}{5-3a}$ 이므로 일차함수가 아니다.

2) $a\neq-2$ 일 때,

$$y=\frac{5-3a}{a+2}x-\frac{3}{a+2}$$

$\dfrac{5-3a}{a+2}<0$ 에서 $\dfrac{(3a-5)}{(a+2)}>0$

$\therefore\ a<-2$ 또는 $a>\dfrac{5}{3}$

$-\dfrac{3}{a+2}>0$ 에서 $a+2<0$

$\therefore\ a<-2$

1), 2) 에 의해서 $a<-2$ 이다.

20. 일차함수 $y=-(a+3)x+8$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 5)$, $(2,\ -7)$을 지나는 일차함수와 평행할 때, $f(b)=12$라고 한다. 이때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

두 점 $(-1,\ 5)$, $(2,\ -7)$을 지나는 일차함수의 그래프는 $\dfrac{-7-5}{2-(-1)}=-4$이므로

$-4=-(a+3)$, $a=1$이다.

따라서 주어진 일차함수는 $y=-4x+8$이므로 $12=-4\times b+8$, $b=-1$이다.

$\therefore a+b=1+(-1)=0$이다.

21. 다음 두 점 $(-1,\ 4)$, $(2,\ 5)$를 지나는 직선에 평행한 직선을 그래프로 갖는 일차함수는?

① $y=3x+1$ ② $y=-3x+5$ ③ $y=x-3$

④ $y=\dfrac{1}{3}x-2$ ⑤ $y=-\dfrac{1}{3}x-3$

해설

$$(\text{기울기})=\frac{5-4}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$$

22. 기온이 변화함에 따라 소리의 속력은 다음 표와 같이 변화한다고 한다. 기온이 $-15\,°\mathrm{C}$일 때의 소리의 속력은?

기온(℃)	0	5	10	15	20
소리의 속력(m/s)	331	334	337	340	343

▶ 답 : ______ m/s

▷ 정답 : 322 m/s

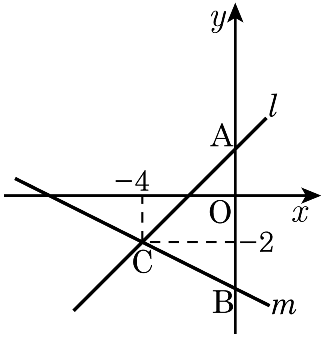
해설

$$(\text{기울기}) = \frac{334-331}{5-0} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore\ y = \frac{3}{5}x + 331$$

$x = -15$ 일 때, $y = \frac{3}{5} \times (-15) + 331 = 322$

23. 다음 그림에서 직선 ℓ, m의 기울기는 각각 1, $-\frac{1}{2}$이고, 점 $\mathrm{C}(-4,\ -2)$에서 만난다. $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는?



① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

$\ell : y = x + b$에 점 $(-4,\ -2)$를 대입하면

$-2 = -4 + b$에서 $b = 2$

$\therefore y = x + 2$

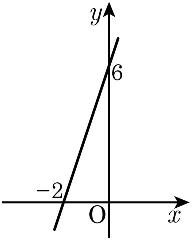
$m : y = -\frac{1}{2}x + c$에 점 $(-4,\ -2)$를 대입하면

$-2 = 2 + c$에서 $c = -4$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x - 4$

$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times \{2 - (-4)\} \times 4 = 12$

24. 일차방정식 $(-2+a)x+y-4+b=0$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

ⅰ) y절편이 6이므로 점 $(0,\ 6)$을 일차방정식 $(-2+a)x+y-4+b=0$에 대입하면

$b=-2$이다.

ⅱ) x절편이 -2이므로 점 $(-2,\ 0)$을 일차방정식 $(-2+a)x+y-4+b=0$에 대입하면

$4-2a-4+b=0,\ \ -2a-2=0,\ a=-1$이다.

ⅰ), ⅰ)에 의하여 $a=-1,\ b=-2$이므로

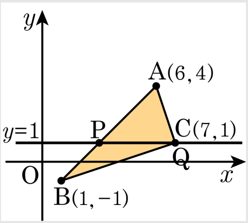
$a+b=-3$이다.

25. 세 점 $A(6,\ 4)$, $B(1,\ -1)$, $C(7,\ 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. x 축에 평행한 직선이 삼각형 ABC 와 두 점 PQ 에서 만난다고 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설



선분 PQ 의 길이가 최대가 되려면 위의 그림과 같이 점 Q 는 점 C 와 같아야 한다.

즉, x 축과 평행한 직선의 그래프는 $y = 1$ 이고,

점 P 의 좌표는 직선 AB 와 $y = 1$ 의 교점이다.

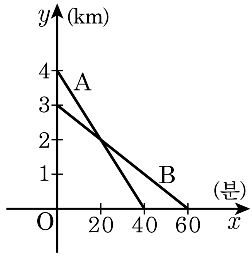
직선 AB 의 그래프는 $(6,\ 4)$ 와 $(1,\ -1)$ 을 지나는 직선의 방정식과 같으므로

$$y + 1 = \frac{4+1}{6-1}(x-1) \qquad \therefore\ y = x - 2$$

$y = x - 2$ 와 $y = 1$ 의 교점의 좌표는 $P(3,\ 1)$

따라서 선분 PQ 의 길이의 최댓값은 $7 - 3 = 4$ 이다.

26. 다음 그래프는 두 사람 A, B가 각각 집에서 출발하여 학교로 갈 때, 이동한 시간 x와 학교까지 남은 거리 y를 나타낸 것이다. 만약 A가 원래 출발한 시각보다 t분 늦게 출발한다면, B는 원래 출발한 시각보다 $f(t)$분 더 일찍 출발해야 A와 동시에 학교에 도착할 수 있다고 할 때, 함수 $f(t)$의 식을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $-t+20$

해설

직선 A 의 방정식 $\dfrac{x}{40}+\dfrac{y}{4}=1$ 에서

$y=-\dfrac{1}{10}x+4\cdots$ ㉠

직선 B 의 방정식 $\dfrac{x}{60}+\dfrac{y}{3}=1$ 에서

$y=-\dfrac{1}{20}x+3\cdots$ ㉡

A 가 원래 출발한 시간보다 t 분 늦게 출발하였으므로 ㉠ 에 x 대신 $x-t$ 를 대입하면

$y=-\dfrac{1}{10}(x-t)+4\cdots$ ㉢

B 가 원래 출발한 시간보다 $f(t)$ 분 빨리 출발하였으므로 ㉡ 에 x 대신 $x+f(t)$ 를 대입하면

$y=-\dfrac{1}{20}(x+f(t))+3\cdots$ ㉣

학교에 도착하는 시간이 같으므로 ㉢, ㉣ 의 x 절편이 같아야 한다.

㉢ 의 x 절편은 $40+t$

㉣ 의 x 절편은 $60-f(t)$

$40+t=60-f(t)$

$\therefore\ f(t)=-t+20$

27. 두 직선 $x+3y-4=0$, $x+ay-2=0$의 교점이 제2 사분면 위에 있도록 a의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

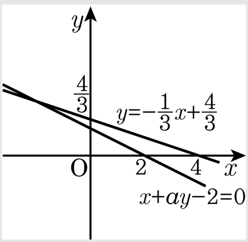
▷ 정답 : $\frac{3}{2}<a<3$

해설

$x+ay-2=0$, $ay=-x+2$,

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{2}{a}=-\frac{1}{a}(x-2)$

$\Rightarrow$ 점 $(2,0)$을 지난다.



점 $\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$를 지날 때의 기울기

$\frac{0-\frac{4}{3}}{2-0}=\frac{-\frac{4}{3}}{2}=-\frac{2}{3}$

두 직선의 교점이 제2 사분면 위에 있으려면

$-\frac{2}{3}<-\frac{1}{a}<-\frac{1}{3}$

$-\frac{2}{3}<-\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{2}{3}>\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{3}{2}<a$

$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{3}\Rightarrow a<3$

$\therefore\frac{3}{2}<a<3$

28. 세 직선 $x+y-4=0$, $x+2y-10=0$, $3x+2y-a=0$의 교점으로 삼각형이 만들어지지 않을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

세 직선의 기울기가 서로 다르므로 한 점에서 만날 때의 a의 값을 구한다.

$\begin{cases} x+y=4 & \cdots ㉠ \\ x+2y=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 에서 ㉠ − ㉡을 하면

$-y=-6 \qquad \therefore\ y=6$

$y=6$을 ㉠에 대입하면 $x=-2$

$x=-2$, $y=6$을 $3x+2y-a=0$에 대입하면

$3\times(-2)+2\times6-a=0 \qquad \therefore\ a=6$

29. 좌표평면 위의 네 점 $A(-1,\ 2)$, $B(2,\ 4)$, $C(4,\ 3)$, $D(4,\ 0)$ 과 원점 O 로 만들 수 있는 오각형 OABCD 의 넓이를 점 B 를 지나는 직선이 이등분한다고 할 때, 이 직선의 x 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{4}$

해설

점 B 에서 x 축에 수선을 내려 그 교점을 P 라 하면

사다리꼴 PBCD 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times (4+3) = 7$

$$\square BAOP = \triangle ABP + \triangle AOP$$
$$= \frac{1}{2} \times \{(4 \times 3) + (2 \times 2)\} = 8$$

사다리꼴 PBCD 와 $\square$BAOP 의 넓이의 차는 1 이다. 구하는 직선의 x 절편을 $M(a,\ 0)$ 이라 하면

$\triangle BMP = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 4 \times (2-a)$ 에서 $a = \frac{7}{4}$ 이다. 따라서

구하는 직선의 x 절편은 $\frac{7}{4}$ 이다.