1. 정수 n에 대하여 $f(n) = \sqrt{(2n-2)(2n+2)+4}$이라고 할 때, $f(-5)+f(-4)+\cdots+f(4)+f(5)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$f(-5) = \sqrt{(-12)\times(-8)+4} = 10 = 2\times5$

$f(-4) = \sqrt{(-10)\times(-6)+4} = 8 = 2\times4$

$\vdots$

$f(0) = \sqrt{(-4)+4} = 0 = 2\times0$

$\vdots$

$f(5) = \sqrt{8\times12+4} = 10 = 2\times5$

$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)$

$= 2(5+4+\cdots+0+1+\cdots+5)$

$= 2\times30 = 60$

2. $a,\ b,\ c$ 가 $a>0$, $b>0$, $c>0$ 이고, $c>b>a$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{(c-a)^2}$ 을 간단히 하면?

① $a+b+c$ ② $a-b-c$ ③ $2b-2c$

④ 0 ⑤ $2a-2b$

해설

$a-b<0,\ b-c<0,\ c-a>0$ 이므로

$\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{(c-a)^2}$

$=-(a-b)-\{-(b-c)\}-(c-a)$

$=-a+b+b-c-c+a$

$=2b-2c$

3. $\sqrt{\dfrac{12x}{y}}$ 가 자연수가 되게 하는 자연수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\sqrt{\dfrac{12x}{y}} = \sqrt{\dfrac{2^2 \times 3 \times x}{y}}$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 x, y 는 다음과 같다.
분모 y 는 $2^2 \times 3 \times x$ 의 약수가 되어야 하므로
$y = 1$ 일 때, x 는 $3 \times$ (자연수)^2 꼴이므로 최솟값은 $3 \times 1^2 = 3$ 이다. $\therefore x + y = 3 + 1 = 4$
$y = 2$ 일 때, x 는 $2 \times 3 \times$(자연수)^2 꼴이므로 최솟값은 $2 \times 3 \times 1^2 = 6$ 이다. $\therefore x + y = 6 + 2 = 8$
$y = 3$ 일 때, x 는 (자연수)^2 꼴이므로 최솟값은 $1^2 = 1$ 이다. $\therefore x + y = 1 + 3 = 4$
y 가 1, 2, 3 이외의 자연수일 때, $x + y \geq 7$ ($y = 4$ 일 때, $x = 3$) 이다.
따라서 $x + y$ 의 최솟값은 4 이다.

4. 1부터 9까지의 숫자가 적힌 카드가 한 장씩 있다. 이 카드 중에서 임의로 3장을 뽑을 때, $\sqrt{126abc}$ 가 자연수가 되는 경우는 모두 몇 가지인가?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\sqrt{126abc} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 7 \times abc}$

$abc = 14$ 또는 $abc = 56$ 또는 $abc = 126$

$abc = 224$ 또는 $abc = 504$

$abc = 14$ 일 때, $(1, 2, 7)$

$abc = 56$ 일 때, $(1,\ 7,\ 8)$, $(2,\ 4,\ 7)$

$abc = 126$ 일 때, $(2,\ 7,\ 9)$, $(3,\ 6,\ 7)$

$abc = 224$ 일 때, $(4,\ 7,\ 8)$

$abc = 504$ 일 때, $(7,\ 8,\ 9)$

5. a, b에 대하여 a, b는 10보다 작은 자연수이고 $\sqrt{a^2+15} = \sqrt{2b}$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=9$

해설

양변을 제곱하면 $a^2+15=2b$ 이므로 $2b-a^2=15$
이때 a, b는 10보다 작은 자연수 이므로
$\therefore (a,b)=(1,8)$
$\therefore a+b=9$

6. 부등식 $2\sqrt{2} < \sqrt{x} \le \sqrt{11}$ 을 만족하는 자연수 x 를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 11

해설

$2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{x} \le \sqrt{11}$ 이므로 $8 < x \le 11$ 인 자연수는 $x = 9, 10, 11$ 이다.

7. 다음 중 옳은 것을 골라라.

보기

㉠ $y = x - \sqrt{3}$ 을 만족하는 유리수 x, y 가 적어도 한 쌍은 존재한다.

㉡ $y = x + \sqrt{2}$ 일 때, $x + y$ 의 값은 항상 무리수이다.

㉢ 임의의 무리수 x 에 대하여 $xy = 1$ 이면 y 도 항상 무리수이다.

㉣ 직선 $y = \sqrt{3}x$ 를 지나는 점의 x 좌표와 y 좌표는 모두 항상 무리수이다.

㉤ $x + y$, $x - y$ 가 모두 무리수이면, x, y 도 항상 무리수이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ (유리수) ± (유리수) = (유리수) 이므로 두 유리수 x, y 에 대하여 $x - y \neq \sqrt{3}$ $\therefore y \neq x - \sqrt{3}$

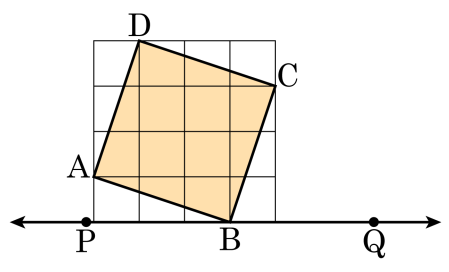
㉡ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이면 $x + y = 0$: 유리수

㉢ 임의의 무리수 x 에 대해 $y = \frac{1}{x}$ 이므로 y 는 항상 무리수이다.

㉣ $y = \sqrt{3}x$ 은 $(0,\ 0)$ 을 지나므로 $x = 0$, $y = 0$: 유리수

㉤ $x = 1, y = \sqrt{3}$ 이면 $x+y = 1+\sqrt{3}$ 으로 무리수, $x-y = 1-\sqrt{3}$ 으로 무리수, 하지만 x는 유리수

8. 다음 그림과 같은 수직선 위의 정사각형 ABCD에서 $\overline{AB} = \overline{PB}$, $\overline{CB} = \overline{QB}$일 때, $\overline{PQ}$의 길이를 구하여라. (단, 모눈 한 칸의 길이는 1 이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{10}$

해설

$\overline{BC}$를 대각선으로 하는 직사각형에서 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 색칠하지 않은 부분의 삼각형의 넓이는 가로 1 , 세로 3인 직사각형 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로 $1 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$이다.

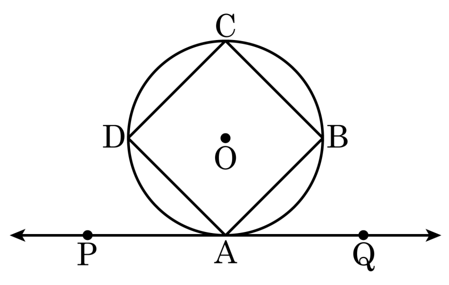
따라서 $\square ABCD = 4 \times 4 - \frac{3}{2} \times 4 = 10$이다.

$\square ABCD$는 정사각형이므로

$\overline{BC}^2 = 10$, $\therefore \overline{BC} = \sqrt{10}$

$\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{10}$ 이므로 $\overline{PQ} = 2\sqrt{10}$이다.

9. 다음 그림과 같은 수직선 위의 정사각형 ABCD와 선분 DB를 지름으로 하는 원 O에서 $\overline{AD} = \overline{PA}$, $\overline{AB} = \overline{AQ}$이고 원 O의 넓이는 18π일 때, $\overline{PQ}$를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 12π

해설

□ABCD의 대각선의 길이는 원의 지름에 해당하고 원의 넓이가 18π 이므로
대각선의 길이는 $6\sqrt{2}$이다.
따라서 □ABCD의 한 변의 길이는 6이 되고 선분 PQ의 길이는 12가 된다.
따라서 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이는
$12 \times \pi = 12\pi$이다.

10. 다음을 간단히 하여라.

$$\sqrt{3}-\cfrac{2}{\sqrt{3}-\cfrac{1}{\sqrt{3}-\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{3}-\cfrac{2}{\sqrt{3}-\cfrac{1}{\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)}} \\ &= \sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}+1} \\ &= \sqrt{3}-(\sqrt{3}-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

11. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3\sqrt{5}$를 만족하는 자연수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$에 대하여 x의 최댓값을 구하여라.
(단, $1 \le y \le 100$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 245

해설

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3\sqrt{5}$에서 $\sqrt{x} = 3\sqrt{5} + \sqrt{y}$
$\sqrt{x}$와 $\sqrt{y}$를 계산할 수 있어야 하므로
$\sqrt{y} = a\sqrt{5}$꼴이 되어야 한다. (단, a는 자연수이다.)
$1 \le y \le 100$이고 $\sqrt{y} = a\sqrt{5}$ 이므로 $y = 5a^2$
$1 \le y \le 100$이고 5의 배수이다.
$a = 1$일 때, $y = 5 \times 1^2 = 5$ $\therefore$ $y = 5,\ x = 80$
$a = 2$일 때, $y = 5 \times 2^2 = 20$ $\therefore$ $y = 20,\ x = 125$
$a = 3$일 때, $y = 5 \times 3^2 = 45$ $\therefore$ $y = 45,\ x = 180$
$a = 4$일 때, $y = 5 \times 4^2 = 80$ $\therefore$ $y = 80,\ x = 245$
따라서 순서쌍 $(x,\ y)$에서 x의 최댓값은 245이다.

12. a 가 두 자리 자연수일 때, $\frac{\sqrt{a}+8}{\sqrt{a}-2}$ 의 정수부분이 3 이 되도록 하는 a 의 개수를 구하여라.

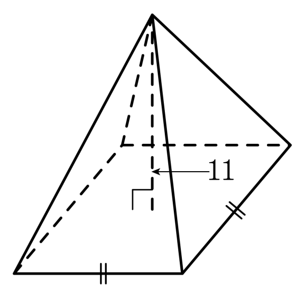
▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 21 개

해설

$3 \le \frac{\sqrt{a}+8}{\sqrt{a}-2} < 4$ 에서 양변에 $\sqrt{a}-2$ ($\because$ $\sqrt{a}-2>0$) 를 곱하면
$3(\sqrt{a}-2) \le \sqrt{a}+8 < 4(\sqrt{a}-2)$
$3\sqrt{a}-6 \le \sqrt{a}+8$ 에서 $\sqrt{a} \le 7$ 이므로 $a \le 49$
$\sqrt{a}+8 < 4\sqrt{a}-8$ 에서 $-3\sqrt{a} < -16$, $\sqrt{a} > \frac{16}{3}$ 이므로 $a > \frac{256}{9}$
즉, $\frac{256}{9} < a \le 49$ 에서 a 는 두 자리 자연수 이므로 $29, 30, \cdots, 49$ 이다.
따라서 a 의 개수는 21 개이다.

13. 다음 그림에서 각뿔의 부피가 $330\,\mathrm{cm}^3$ 일 때, 밑면의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ____ cm

▷ 정답 : $3\sqrt{10}$ cm

해설

밑면의 한 변의 길이 : $x\,\mathrm{cm}$

$\frac{1}{3}\times x^2\times 11 = 330,\ x^2 = 90$

$\therefore\ x = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}\,(\mathrm{cm})$

14. $x+y+z=6$, $xy+yz+zx=11$, $xyz=6$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$x+y+z=6$ 에서
$x+y=6-z$
$y+z=6-x$
$z+x=6-y$
$\therefore (x+y)(y+z)(z+x)$
$=(6-z)(6-x)(6-y)$
$=6^3-(x+y+z)6^2+(xy+yz+zx)6-xyz$
$=216-216+66-6$
$=60$

15. $x+y+z=3$, $xy+yz+zx=-1$, $xyz=-3$ 일 때, $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{19}{9}$

해설

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x^2y^2z^2}$

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

$=(xy+yz+zx)^2-2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$

$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=1+2\times3\times3=19$

$\therefore\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{19}{(-3)^2}=\frac{19}{9}$

16. $x^2 - y^2 = -1,\ x - y = 2$ 일 때, 다음을 계산하여라.
$(x+y)^{100}(x-y)^{102}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

(주어진 식) $= (x+y)^{100}(x-y)^{100}(x-y)^2$
$= (x^2-y^2)^{100}(x-y)^2$
에서 $x^2 - y^2 = -1,\ x - y = 2$ 를 대입하면
(주어진 식) $= (-1)^{100} \times 2^2 = 4$

17. $(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = a3^b-2^c$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 65

해설

$(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})$
$= a3^b - 2^c$ 에서 양변에 $(3-2)$ 를 곱하면
$(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = (3-2)(a3^b-2^c)$
$(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = a3^b-2^c$
$(3^4-2^4)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = a3^b-2^c$
$3^{32}-2^{32} = a3^b-2^c$
$\therefore\ a=1,\ b=32,\ c=32$
$\therefore\ a+b+c=65$

18. $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)=0$ 일 때, $x-\frac{1}{x}$ 의 값을 구하여라. (단, $x>1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)=0$, $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$ 의 양변을 x 로 나누면

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$,

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(x+\frac{1}{x})^2-4=\frac{25}{4}-\frac{16}{4}=\frac{9}{4}$,

$\therefore x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}(\because\ x>1)$

19. $a^2+\frac{ab}{2}+b^2=10$, $a^2-\frac{ab}{2}+b^2=8$ 일 때, $(a-b)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a^2+\frac{ab}{2}+b^2=10\cdots$ ㉠

$a^2-\frac{ab}{2}+b^2=8\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 을 하면

$2a^2+2b^2=18$

$a^2+b^2=9$

㉠ − ㉡ 을 하면

$\frac{2ab}{2}=2,\ ab=2$

$\therefore\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2=9-4=5$

20. $\frac{(x+y)^2}{3} = (x-y)^2 = 2$ 일 때, $(x+2y)(2x+y)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$(x+y)^2 = 6$

$(x-y)^2 = 2$

$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ 이므로

$\therefore\ xy = 1$

$\therefore\ (x+2y)(2x+y) = 2(x+y)^2 + xy = 12 + 1 = 13$

21. $x^2 - 10x + A = (x + B)^2$ 에서 A, B 에 맞는 수를 써라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $A = 25$

▷ 정답 : $B = -5$

해설

$$(x + B)^2 = x^2 + 2Bx + B^2$$
$$= x^2 - 10x + A$$

$2B = -10 \quad \therefore B = -5$

$B^2 = (-5)^2 = A \quad \therefore A = 25$

22. $(x+2)(x+a)-3$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, a 가 될 수 있는 값을 모두 구하여라. (단, 주어진 다항식은 정수 범위에서 인수분해 된다.)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 0

▷ 정답: 4

해설

$(x+2)(x+a)-3=(x+\alpha)(x+\beta)$로 놓으면

$x^2+(a+2)x+2a-3=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

$a+2=\alpha+\beta$에서 $a=\alpha+\beta-2$

$2a-3=\alpha\beta$에서 $a=\dfrac{\alpha\beta+3}{2}$

$\therefore\ \alpha+\beta-2=\dfrac{\alpha\beta+3}{2}$

$\alpha\beta-2\alpha-2\beta+7=0$

$(\alpha-2)(\beta-2)=-3$

$\alpha-2=\pm1$ 일 때, $\beta-2=\mp3$ 이므로

$(\alpha,\ \beta)=(3,\ -1)(1,\ 5)$

$\therefore\ a=\alpha+\beta-2$ 에서 $a=0,\ 4$

23. $x^3+ax^2-bx+12$ 가 $(x-1)$ 과 $(x+2)$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=3$

해설

$x^3+ax^2-bx+12$
$=(x-1)(x+2)(x+k)$
$=x^3+(k+1)x^2+(k-2)x-2k$
$-2k=12,\ \therefore k=-6$
$a=k+1=-5$
$-b=k-2=-8,\ \therefore b=8$
$\therefore a+b=-5+8=3$

해설

$f(x)=x^3+ax^2-bx+12$ 라 할 때,
$f(x)$가 $(x-1)$ 와 $(x+2)$ 를 인수로 가지면
$f(1)=0$, $f(-2)=0$ 이므로,
$1^3+a\times1^2-b\times1+12=0\cdots$㉠
$(-2)^3+a\times(-2)^2-b\times(-2)+12=0\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $a=-5,\ b=8$
$\therefore\ a+b=-5+8=3$

24. $f(x) = x^2 - 8x - 48$, $f(x)$가 40의 약수를 인수를 가질 때, 자연수 x의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - 8x - 48 = (x+4)(x-12)$ 이고
40 의 약수는 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40이다.
$f(x) = x^2 - 8x - 48 = (x+4)(x-12)$ 이므로
$x+4$ 또는 $x-12$ 가 40 의 약수가 되어야 한다.
이때, 자연수 x 가 최댓값을 가지려면,
$x - 12 = 40$ 일 때이므로 $x = 52$

25. 다항식 $(x^2-4)(x^2-2x-3)-21$ 를 인수분해했을 때, 다음 중 인수인 것은?

① x^2-x+1 ② x^2+x-1 ③ x^2-2x-1
④ x^2-x+3 ⑤ x^2-x+9

해설

$$(x^2-4)(x^2-2x-3)-21$$
$$=(x+2)(x-2)(x-3)(x+1)-21$$
$$=(x+2)(x-3)(x+1)(x-2)-21$$
$$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)-21$$

$x^2-x=\mathrm{A}$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}-6)(\mathrm{A}-2)-21 &= \mathrm{A}^2-8\mathrm{A}+12-21\\ &= \mathrm{A}^2-8\mathrm{A}-9\\ &= (\mathrm{A}-9)(\mathrm{A}+1)\\ &= (x^2-x-9)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

26. 다항식 $a^2x+1-x-a^2$ 을 인수분해하였을 때, 다음 <보기> 중 그 인수가 될 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $x+1$　　ㄴ $a+1$

ㄷ x^2+1　　ㄹ $a-1$

① ㄱ, ㄴ　　② ㄱ, ㄷ　　③ ㄴ, ㄹ

④ ㄷ, ㄹ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

(준식) $= a^2x-a^2-x+1$

$= a^2(x-1)-(x-1)$

$= (a^2-1)(x-1)$

$= (a+1)(a-1)(x-1)$

27. $a^3+b^3+c^3=3abc$일 때, $\frac{2b}{a}+\frac{c}{2b}+\frac{2a}{c}$의 값을 구하여라. (단, $a+b+c\neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{2}$

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

이때 $a,\ b,\ c$는 실수이고 $a+b+c\neq 0$이므로

$\therefore\ a=b=c$

$\therefore\ \frac{2b}{a}+\frac{c}{2b}+\frac{2a}{c}=\frac{9}{2}$

28. $\dfrac{207^2 - 134^2}{52^2 - 21^2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{(207+134)(207-134)}{(52+21)(52-21)} \\ &= \frac{341\times 73}{73\times 31} = 11\end{aligned}$$

29. $a+b=4$, $a^2-b^2=20$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a-b=5$

해설

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 이므로

$4\times(a-b)=20$

$\therefore a-b=5$

30. $x=-3+\sqrt{5}$, $y=3+\sqrt{5}$ 일 때 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$

해설

$y-x=3+\sqrt{5}-(-3+\sqrt{5})$
$=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=6$

$xy=(-3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})$
$=(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)$
$=5-9=-4$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$

31. $a+b=3$, $ab=1$ 일 때, $a^2(a-b)+b^2(b-a)$ 의 값은?

① 13　　② 15　　③ 17　　④ 18　　⑤ 20

해설

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=3^2-4\times1=5$

$\therefore$ (준식) $=a^2(a-b)-b^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a-b)^2(a+b)$

$=5\times3=15$