1. 함수 $f(x)$가 임의의 $x,\ y$ 에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y)=2x^2,\ f(x)=f(-x)$를 만족시킬 때, $f(1)\cdot f(2)$의 값은? (단, $f(0)=1$)

① 1　② 4　③ 8　④ 10　⑤ 12

해설

임의의 $x,\ y$ 에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y)=2x^2$, $f(x)=f(-x)$ 일 때

i) $x=1,\ y=0$ 을 대입

$f(1+0)+f(0-1)-2f(0)=2\times1$ ($\because\ f(0)=1$)

$f(1)+f(-1)-2\times1=2\times1$

$2f(1)=4$ ($\because f(1)=f(-1)$) $\rightarrow f(1)=2$

ii) $x=1,\ y=1$ 을 대입

$f(1+1)+f(1-1)-2f(1)=2\times1$

$f(2)+f(0)-2\times2=2$

$f(2)+1-4=2\ \rightarrow\ f(2)=5$

$\therefore\ f(1)\cdot f(2)=2\times5=10$

2. 정의역과 공역이 모두 자연수의 집합인 함수 $f(n)$ 이 있다. $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 이고, $f(7) = 21$ 일 때, $f(9)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 55

해설

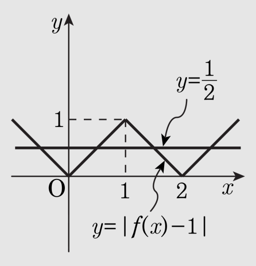
$f(1) = a,\ f(2) = b$ 라고하면 $f(3) = a + b$
$f(4) = a + 2b$
$f(5) = 2a + 3b$
$f(6) = 3a + 5b$
$f(7) = 5a + 8b = 21$ 을 만족하는 자연수는
$\therefore\ a = 1,\ b = 2$
$f(8) = 8a + 13b$
$f(9) = 13a + 21b = 13 + 42 = 55$

3. 함수 $f(x)=|x-1|$ 에 대하여 $(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 의 실근의 개수를 구하면?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f\circ f)(x)=|f(x)-1|$ 이므로
$y=|f(x)-1|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|f(x)-1|$ 의 그래프와
직선 $y=\frac{1}{2}$ 이 4 개의 점에서
만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4 개이다.

4. 실수 전체의 집합을 R, 유리수 전체의 집합을 Q 라 할 때, R 에서 R 로의 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$f(x) \begin{cases} \sqrt{2} & (\ x \in Q\text{일 때}) \\ 1 & (\ x \notin Q\text{일 때}) \end{cases}$ 함수 f 에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

ㄱ $x \in Q$ 일 때, $(f \circ f)(x) = 1$

ㄴ $x \in R$ 일 때, $f(x + f(x)) = 1$

ㄷ $x_1, x_2 \in R$ 이고, $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이면 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = 1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $x \in Q$ 이면 $f(x) = \sqrt{2} \notin Q$
$\therefore\ (f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1$
ㄴ i) $x \in Q$ 이면 $x + f(x) = x + \sqrt{2} \notin Q$
$\therefore\ f(x + f(x)) = 1$
ii) $x \notin Q$ 이면 $x + f(x) = x + 1 \notin Q$
$\therefore\ f(x + f(x)) = 1$
따라서, $x \in R$ 이면 $f(x + f(x)) = 1$
ㄷ $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이므로 $x_1 \notin Q,\ x_2 \notin Q$
그런데 $x_1 = 1 + \sqrt{2},\ x_2 = 1 - \sqrt{2}$ 인 경우에는
$f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이지만
$f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(1) = \sqrt{2}$
따라서 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 가 반드시 1이라고 할 수는 없다.

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \to A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x = 1) \end{cases}$$ 로 정의한다.

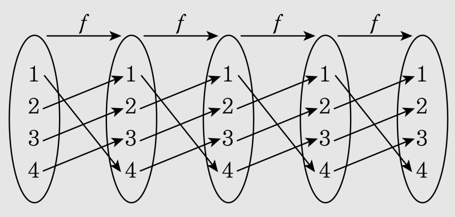
이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.
(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$)

▶ 답 :

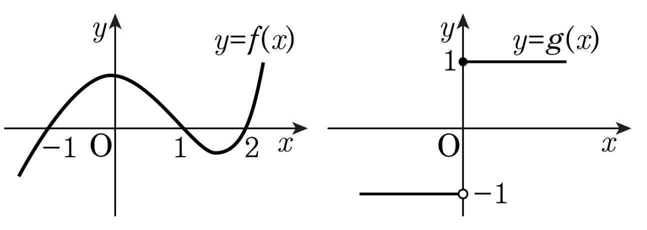
▷ 정답 : -3

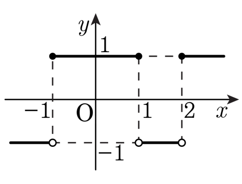
해설

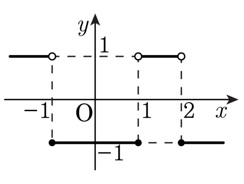
주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,
1은 4로 대응시킴을 의미한다.
다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면
4번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.
$\therefore f^4(x) = x$
$\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \cdots = f^4(x) = x$
$\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$

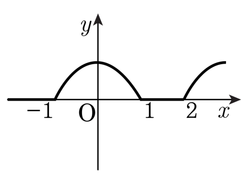


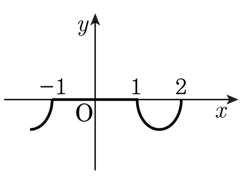
6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f,\ g$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 합성함수 $(g\circ f)(x)$ 의 그래프는?

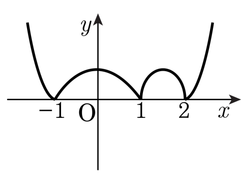


①


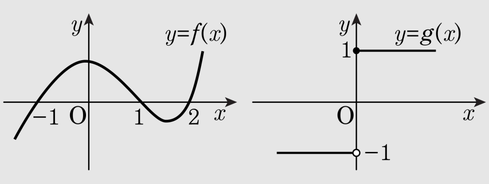
②


③


④


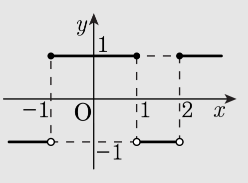
⑤


해설



$$g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$ 이므로

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}1 & (-1\leq x\leq 1,\ 2\leq x)\\ -1 & (x<-1,\ 1<x<2)\end{cases}$$



7. 함수 $f(x) = 2x+1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

① $\frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{6}g(x) - \frac{1}{6}$ ③ $2g(x) - 1$
④ $\frac{1}{3}g(x)$ ⑤ $\frac{1}{2}g(x)$

해설

$f(x) = 2x + 1$ 에서 $y = 2x + 1$ 이라 놓고

x 에 대하여 정리하면 $x = \frac{y-1}{2}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{x-1}{2}$

$\therefore\ f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x-1}{2}$

$f(3x) = 6x + 1$ 에서 $y = 6x + 1$ 이라 놓고

x 에 대하여정리하면 $x = \frac{y-1}{6}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{x-1}{6}$

$\therefore\ f^{-1}(3x) = g(3x) = \frac{x-1}{6}$

$\therefore\ g(3x) = \frac{1}{3} \times \frac{x-1}{2} = \frac{1}{3} \cdot g(x)$

8. 정의역이 $\{x \mid x > 0\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = \sqrt{x}$ 가 있다.
$(f \circ g^{-1})(a) = -1$ 일 때, $(g \circ f)(4a)$ 의 값은 ?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$g(x) = \sqrt{x} = y$ 의 역함수는 $x = \sqrt{y}$

$\therefore g^{-1}(x) = x^2 \ (x > 0)$

$(f \circ g^{-1})(a) = f(a^2)$

$= a^4 - 2a^2 = -1$

$(a^2 - 1)^2 = 0$

$\therefore a = 1 \leftarrow$ 정의역이 $\{x \mid x > 0\}$

$(g \circ f)(4a) = g(f(4)) = g(8) = 2\sqrt{2}$

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = -1$ 에서 $g^{-1}(a) = k$ 라 하면

$f(k) = k^2 - 2k = -1$, $(k - 1)^2 = 0$, $k = 1$ 이므로

$g^{-1}(a) = 1 \Leftrightarrow g(1) = a$

$g(1) = \sqrt{1} = a$

$\therefore (g \circ f)(4a) = g(f(4a)) = g(f(4))$

$= g(4^2 - 2 \times 4) = g(8) = \sqrt{8}$

9. 수직선 위에 네 점 A (-2), B (0), C (1) 이 있다. 이 수직선 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

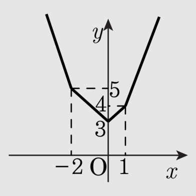
▷ 정답 : 3

해설

점 P 의 좌표를 P (x) 라고 하면
$\overline{\mathrm{PA}}=|x+2|$, $\overline{\mathrm{PB}}=|x|$, $\overline{\mathrm{PC}}=|x-1|$,
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=|x+2|+|x|+|x-1|$ 이므로
$y=|x+2|+|x|+|x-1|$ 로 놓고
$x=-2,\ 0,\ 1$ 을 경계로 하여 구간을 나누면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=\begin{cases}-3x-1 & (x<-2\text{일 때})\\ -x+3 & (-2\le x<0\text{일 때})\\ x+3 & (0\le x<1\text{일 때})\\ 3x+1 & (x\ge 1\text{일 때})\end{cases}$$

따라서, $y=|x+2|+|x|+|x-1|$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 구하는 최솟값은 3 이다.



10. $\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+4}+\dfrac{x+6}{x+5}$를 간단히 하면?

① $\dfrac{2(2x-1)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$
② $\dfrac{2(2x+1)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$
③ $\dfrac{2(2x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$
④ $\dfrac{2(x+5)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$
⑤ $\dfrac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \left(1+\frac{1}{x+2}\right)-\left(1+\frac{1}{x+3}\right)\\ &\quad -\left(1+\frac{1}{x+4}\right)+\left(1+\frac{1}{x+5}\right)\\ &= \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}\\ &= \frac{2x+7}{(x+2)(x+5)}-\frac{2x+7}{(x+3)(x+4)}\\ &= \frac{(2x+7)(x^2+7x+12-x^2-7x-10)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}\\ &= \frac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}\end{aligned}$$

11. $\frac{x+y}{x}=\frac{y+z}{y}=\frac{z+x}{z}=k$일 때, $k^{2008}+\frac{1}{k^{2008}}$의 값을 구하면? (단, $xyz \neq 0,\ x \neq y \neq z$)

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 5

해설

$x+y=kx\cdots$①, $y+x=kz\cdots$②, $z+x=ky\cdots$③

①+②+③하면 $2(x+y+z)=k(x+y+z)$

i) $x+y+z \neq 0$이면 $k=2$

① 에 대입하면 $x+y=2x, x=y$이 되므로

$x \neq y \neq z$인 조건에 모순

$\therefore x+y+z=0$

ii) $x+y+z=0$이면

$x+y=-z, y+z=-x, z+x=-y$

$-\frac{z}{x}=k, -\frac{x}{y}=k, -\frac{y}{z}=k$

세 식을 변변 곱하면 $k^3=-1$, $(k+1)(k^2-k+1)=0$

$k=-1$이면 $x=z$가 되므로 조건에 모순

$\therefore\ k^2-k+1=0$

$$\begin{cases} k^3=-1 \\ k+\frac{1}{k}=1 \end{cases}$$

$$k^{2008}+\frac{1}{k^{2008}}=(k^3)^{669}\times k+\frac{1}{(k^3)^{669}\times k}$$

$$=-(k+\frac{1}{k})=-1$$

해설

i) $1+\frac{y}{x}=1+\frac{z}{y}=1+\frac{x}{z}=k$에서

$\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{x}{z}=k-1$

$\therefore x=(k-1)z,\ y=(k-1)x,\ z=(k-1)y$

$xyz=(k-1)^3xyz$

$xyz \neq 0$이므로 $(k-1)^3=1$, $(k-1)^3-1=0$,

$\{(k-1)-1\}\{(k-1)^2+(k-1)+1\}=0$

$\therefore (k-2)(k^2-k+1)=0$

$x \neq y \neq z$이므로 $k \neq 2$

$\therefore k^2-k+1=0,\ k^3=-1$

$k+\frac{1}{k}=1$

ii) $k^{2008}+\frac{1}{k^{2008}}$

$=(k^3)^{669}\cdot k+\frac{1}{(k^3)^{669}\cdot k}$

$=-(k+\frac{1}{k})=-1$

12. 비례식 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}(\neq 1)$가 성립할 때, 다음 등식 중 성립하는 것의 개수를 구하면? (단, $mb+nd\neq 0, b+d+f\neq 0$)

㉠ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ㉡ $\frac{2a+3b}{a-b}=\frac{2c+3d}{c-d}$ ㉢ $\frac{a}{b}=\frac{ma+nc}{mb+nd}$ ㉣ $\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ ㉤ $\frac{a^3}{b^2}+\frac{c^3}{d^2}+\frac{e^3}{f^2}=\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$로 놓으면

$a=bk,\ c=dk,\ e=fk$

㉠ (좌변)$=\frac{bk+b}{bk-b}=\frac{k+1}{k-1}$

(우변)$=\frac{dk+d}{dk-d}=\frac{k+1}{k-1}$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉡ (좌변)$=\frac{2bk+3b}{bk-b}=\frac{2k+3}{k-1}$

(우변)$=\frac{2dk+3d}{dk-d}=\frac{2k+3}{k-1}$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉢ (좌변)$=\frac{bk}{b}=k$

(우변)$=\frac{mbk+ndk}{mb+nd}=k$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉣ (좌변)$=\frac{bk\cdot b+dk\cdot d}{bk\cdot b-dk\cdot d}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

(우변)$=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉤ (좌변)$=\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{d^3k^3}{d^2}+\frac{f^3k^3}{f^2}=(b+d+f)k^3$

(우변)$=\frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^2}=(b+d+f)k^3$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

따라서, ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 모두 성립한다.

13. a가 실수일 때, $f(a) = \sqrt{(a+\sqrt{a^2})^2} - \sqrt{(a-\sqrt{a^2})^2}$을 간단히 하면?

① a　　② $2a$　　③ $-a$　　④ $-2a$　　⑤ 0

해설

$\sqrt{a^2} = |a|$이므로 $f(a) = |a+|a|| - |a-|a||$
$a \geq 0$인 경우와 $a < 0$인 경우로 나누어 생각하면
(i) $a \geq 0$일 때,
$f(a) = |a+a| - |a-a| = |2a| = 2a$
(ii) $a < 0$일 때,
$f(a) = |a-a| - |a-(-a)| = -|2a| = 2a$
따라서 모든 실수 a에 대하여 $f(a) = 2a$

14. 양수 x의 소수 부분을 y라 하면 $x^2+y^2=27$이 성립한다. 이때, $y-\frac{1}{y}$의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$0 \le y < 1$이므로 $0 \le y^2 < 1$
$0 \le 27 - x^2 < 1$, $26 < x^2 \le 27$
$\therefore \sqrt{26} < x \le \sqrt{27}$에서 $x = 5.\times\times\times$
따라서, $x = 5 + y$이므로 $(5+y)^2 + y^2 = 27$
$\therefore y^2 + 5y - 1 = 0$ 양변을 y로 나누면
$y + 5 - \frac{1}{y} = 0$
$\therefore y - \frac{1}{y} = -5$

15. $x^2+\frac{1}{x^2}=8$ 일 때, $x^2+\sqrt{6}x$ 의 값은? (단, $0<x<1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+\frac{1}{x^2}=8$ 의 양변에 x^2 을 곱하고 정리하면

$(x^2)^2-8x^2+1=0$

근의 공식으로 풀면

$x^2=4-\sqrt{15}\ (\because\ 0<x<1)\cdots①$

$x=\sqrt{4-\sqrt{15}}\ (\because\ 0<x)$

$=\sqrt{\frac{8-2\sqrt{15}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdots②$

①, ②에 따라

$x^2+\sqrt{6}x$

$=(4-\sqrt{15})+\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

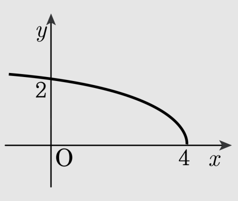
$=4-\sqrt{15}+\sqrt{15}-3=1$

16. 두 집합 $A = \{(x,\ y) \mid y = \sqrt{4-x}\}$, $B = \{(x, y) \mid y = mx + 1, m$ 은 실수$\}$에 대하여 $n(A \cap B) = 2$ 일 때, m의 값의 범위를 구하면?

① $-\frac{1}{2} \le m < 0$　② $-\frac{1}{3} \le m < 0$　③ $-\frac{1}{4} \le m < 0$
④ $-\frac{1}{5} \le m < 0$　⑤ $-\frac{1}{6} \le m < 0$

해설

$y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

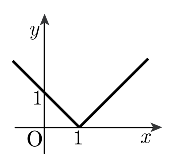


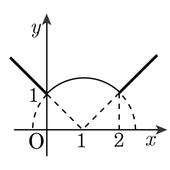
직선 $y = mx + 1$ 은 점 $(0, 1)$ 을 지나고 교점이 두 개이기 위해서는 $m < 0$ 이고 직선이 점 $(4, 0)$ 을 지날 때가 최소이므로

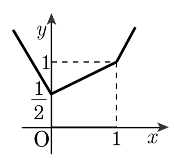
$m = -\frac{1}{4}$

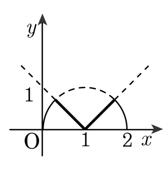
$\therefore -\frac{1}{4} \le m < 0$

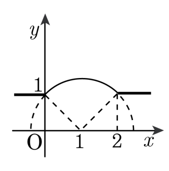
17. 함수 $y = \sqrt{1+|2x-x^2|}$ 의 그래프는 ?

①


②


③


④


⑤


해설

(i) $2x - x^2 \geq 0$
즉, $x^2 - 2x \leq 0$ 일 때,
$0 \leq x \leq 2$
이 때, $y = \sqrt{1+2x-x^2}$ 의 양변을 제곱하면,
$y^2 = 1 + 2x - x^2 \ (y \geq 0)$
$(x-1)^2 + y^2 = 2 \ (y \geq 0) \cdots\cdots\cdots$ ㉠
(ii) $2x - x^2 < 0$ 즉, $x^2 - 2x > 0$ 일 때,
$x < 0$ 또는 $x > 2$
이 때,
$y = \sqrt{1-2x+x^2}$
$= \sqrt{(x-1)^2}$
$= |x-1| \cdots\cdots\cdots$ ㉡
(i), (ii) 에서 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.