

1. 임의의 양수 x, y 에 대하여 항상 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

해설

① $f(0) = f(1 \times 0) = f(1) + f(0)$

$\therefore f(1) = 0$

② $f(6) = f(2 \times 3) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④ $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right), f(1) = 0$ 이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$= f(x) - f(y) (\because \text{④가참})$

2. 집합 $D = \{x \mid -2a \leq x \leq a\}$ 에서 집합 $R = \{x \mid x \text{ 는 실수}\}$ 로의 함수 f 가 $f(x) = x^2 + b$ 이고 $f(D) = D$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, $ab \neq 0$)

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

해설

$a \geq -2a$ 이므로 $a > 0$

그림에서

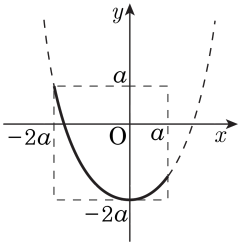
$$f(0) = b = -2a \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f(-2a) &= 4a^2 + b \\ &= a \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

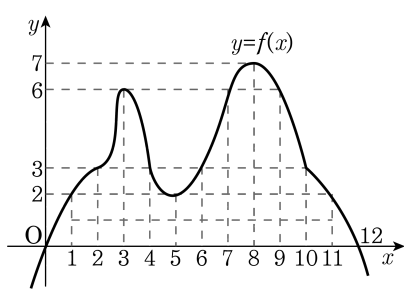
①, ②에서

$$a = \frac{3}{4}, \quad b = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b = -\frac{3}{4}$$



4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = (f \circ f)(x+2)$ 일 때, $g(x) = 6$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수는 몇 개인가? (단, $x < 0$ 또는 $x > 12$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)

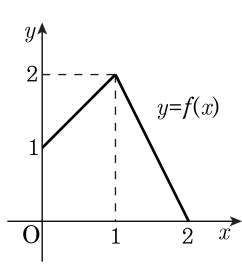


- ① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$g(x) = 6$ 에서 $(f \circ f)(x+2) = 6$ 이므로,
 $f(f(x+2)) = 6$
 $x+2 = t$ 로 놓으면 $f(f(t)) = 6$
 $\therefore f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$ 또는 $f(t) = 9$
 그런데 $f(t) \leq 7$ 이므로
 $f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$
 (i) $f(t) = 3$ 일 때,
 $t = 2$ 또는 $t = 4$ 또는 $t = 6$ 또는 $t = 10$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = 8$
 (ii) $f(t) = 7$ 일 때, $t = 8$
 $\therefore x = 6$
 (i), (ii) 에서
 실수 x 의 값은 $0, 2, 4, 6, 8$ 의 5 개이다.

5. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $f^{2000}\left(\frac{5}{4}\right)$ 의 값은? (단, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f^2(x))$, $\dots$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, n 은 자연수)



- ① 0 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ 2

해설

$0 < x < 1$ 범위에서 $f(x) = x + 1$

$1 < x < 2$ 범위에서 $f(x) = -2x + 4$ 이다.

이때 함수 $f\left(\frac{5}{4}\right)$ 는 5번째부터 3번마다

같은 것이 반복되는 경향을 보인다.

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

$$f^2\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

$$f^3\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^2\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2$$

$$f^4\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^3\left(\frac{5}{4}\right)\right) = 0$$

$$f^5\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^4\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(0) = 1$$

$$f^6\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^5\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2$$

$$\therefore f^{2000}\left(\frac{5}{4}\right) = f^{3 \times 666 + 2}\left(\frac{5}{4}\right) = f^2\left(\frac{5}{4}\right) = 1$$

6. $A = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f(x) = x^2 - 2$ 가 역함수를 갖게 되는 실수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

역함수를 가지려면 함수가 일대일 대응이 되어야 한다.

따라서 $f(x) \geq x$ 를 만족해야한다.

$$\Rightarrow x^2 - 2 \geq x$$

$$\Rightarrow x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$A = \{x \mid x \geq a\} \text{ 이므로 } a = 2$$

7. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 가 아래와 같이 정의되었다고 하자.
- $$f(x) = \begin{cases} 2x - a & (x \leq 0) \\ 3x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$
- 함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & (x \leq 0) \\ 3x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$
$$f(0) = 1 = -a$$
$$\therefore a = -1$$
$$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4) = (f^{-1} \circ f^{-1})(4)$$
$$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(f^{-1}(4))$$
$$f^{-1}(4) = k \text{ 라 하면 } f(k) = 4$$
$$3k + 1 = 4 \text{ (}\because x \leq 0 \text{ 에서 } 2x + 1 \leq 1 \text{) } k = 1 \text{ 이고}$$
$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(1)$$
$$f^{-1}(1) = m, f(m) = 1 \text{ 에서 } 2m + 1 = 1 \text{ (또는 } 3m + 1 = 1 \text{)},$$
$$m = 0$$
$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4) = 0$$

8. 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = g(x)$ 를 만족시킨다. $F(x) = f(x) - g(x)$ 라 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $F(x) = F(-x)$
- ㉡ $F(0) = 0$ 이면 $f(0) = g(0) = 0$ 이다.
- ㉢ $F(x) = 0$ 의 실근의 개수가 유한개이고 $f(0) = g(0)$ 이면
방정식 $F(x) = 0$ 의 실근의 개수는 항상 홀수이다.

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ $F(-x) = f(-x) - g(-x)$
 $= f(x) - g(x) = F(x)$ (참)
- ㉡ $F(0) = f(0) - g(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ (거짓)
- ㉢ $y = F(x)$ 의 그래프가 y 축에 대칭이고
 $f(0) = g(0)$ 이면 $F(0) = 0$ 이므로 방정식 $F(x) = 0$ 의 실근은 $0, \pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \dots$ 로서 홀수 개이다. (참)

9. 함수 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프가 만나는 점은 a 개이고, 이 점들의 x 좌표의 합은 b 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$-3 \leq x < -2$ 일 때, $[x] = -3$ 이므로

$$y = [x] - x = -3 - x$$

$-2 \leq x < -1$ 일 때, $[x] = -2$ 이므로

$$y = [x] - x = -2 - x$$

$-1 \leq x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ 이므로

$$y = [x] - x = -1 - x$$

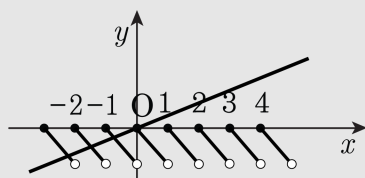
$0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로

$$y = [x] - x = -x$$

$1 \leq 2x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로

$$y = [x] - x = 1 - x$$

따라서 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 두 그래프가 만나는 점은 4개이고

만나는 점의 x 좌표는 다음과 같다.

$$\text{i) } -3 \leq x < -2 \text{ 일 때, } -3 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{9}{4}$$

$$\text{ii) } -2 \leq x < -1 \text{ 일 때, } -2 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{iii) } -1 \leq x < 0 \text{ 일 때, } -1 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{iv) } 0 \leq x < 1 \text{ 일 때, } -x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = 0$$

$$\therefore a = 4, b = \left(-\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore a + b = 4 + \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

10. 0 이 아닌 실수 a, b, c 가 다음 관계를 만족한다. $a^2 + b^2 + c^2 = 1$,
 $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -3$ 일 때, $a+b+c$ 의 값들의
합을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = -3 \text{ 에서}$$

$$a+b+c = k \cdots \textcircled{1} \text{ 으로 놓으면}$$

$$\frac{k-a}{a} + \frac{k-b}{b} + \frac{k-c}{c} = -3$$

$$k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ 에서 } ab+bc+ca=0$$

$$\textcircled{1} \text{ 에서 } k^2 = (a+b+c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 1$$

$$\therefore k = \pm 1$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } \pm 1$$

따라서 k 값들의 합은 0 이다.

11. 어느 도시의 택시 요금은 주황 거리 2km 미만에서는 1000 원이고, 2km가 되는 순간에 1200 원이 되고 그 후부터는 매 500 m 증가할 때마다 200 원씩 요금이 추가된다고 한다. 택시를 타고 간 거리가 x km(단, $x > 2$) 일 때의 택시 요금을 나타내는 식은? (단, $|x|$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다.)
- ① $1000 + 200|x|$ ② $1000 + 200(|x| - 1)$
- ③ $1000 + 200(|x| - 1)$ ④ $1000 + 200(|x| - 2)$
- ⑤ $1000 + 200(2|x| - 3)$

12. 함수 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

- ① 점근선 중 하나는 $x = -2$ 이다.
- ② 점근선 중 하나는 $y = 2$ 이다.
- ③ 함수 $y = \frac{2}{x} + 2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -5 만큼 평행이동한 그래프다.
- ④ 이 그래프는 x 축을 지난다.
- ⑤ 함수 $y = \frac{-5}{x+2}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$$y = \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2(x+2)-5}{x+2} = \frac{-5}{x+2} + 2$$

그러므로 함수의 점근선은 $x = -2$, $y = 2$ 이고

$$y = \frac{-5}{x} \text{의 그래프를 } x \text{ 축 방향으로 } -2 \text{만큼,}$$

y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ③이다.

13. $abc \neq 0$ 인 실수 a, b, c 에 대하여 $\frac{|a|}{a} + \frac{\sqrt{b^2}}{b} + \frac{\sqrt{c^2}}{|c|} + \frac{\sqrt{(abc)^2}}{abc}$ 의 값이 될 수 없는 것은?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\sqrt{b^2} = |b|$, $\sqrt{c^2} = |c|$, $\sqrt{(abc)^2} = |abc|$ 이므로

(주어진 식) = $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + 1 + \frac{|abc|}{abc}$ 에서

a, b, c 의 양, 음에 따라 주어진 식의 값을 구해 보면

(i) $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때,

(주어진 식) = $1 + 1 + 1 + 1 = 4$

(ii) $a > 0, b > 0, c < 0$ 일 때,

(주어진 식) = $1 + 1 + 1 - 1 = 2$

(iii) $a > 0, b < 0, c > 0$ 일 때,

(주어진 식) = $1 - 1 + 1 - 1 = 0$

(iv) $a > 0, b < 0, c < 0$ 일 때,

(주어진 식) = $1 - 1 + 1 + 1 = 2$

(v) $a < 0, b > 0, c > 0$ 일 때,

(주어진 식) = $-1 + 1 + 1 - 1 = 0$

(vi) $a < 0, b > 0, c < 0$ 일 때,

(주어진 식) = $-1 + 1 + 1 + 1 = 2$

(vii) $a < 0, b < 0, c > 0$ 일 때,

(주어진 식) = $-1 - 1 + 1 + 1 = 0$

(viii) $a < 0, b < 0, c < 0$ 일 때,

(주어진 식) = $-1 - 1 + 1 - 1 = -2$

따라서 주어진 식의 값은 -2, 0, 2, 4 중 어느 하나이다.

14. a, b 는 실수이고, $a^3 = 26 + 15\sqrt{3}$, $b^3 = 26 - 15\sqrt{3}$ 일 때, $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ 의 값을 구하면?

① $-2\sqrt{3}$

② $-\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$

⑤ $-3\sqrt{3}$

해설

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 52$$

$$(ab)^3 = (26 + 15\sqrt{3})(26 - 15\sqrt{3}) = 1 \quad \therefore ab = 1$$

$a + b = t$ 라 하면

$$t^3 - 3t - 52 = 0, \quad (t - 4)(t^2 + 4t + 13) = 0$$

a, b 가 실수이므로 t 도 실수이다.

$$t = 4 \text{ 이므로 } a + b = 4$$

$$\text{준식} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$= \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b}$$

$a + b = 4$, $ab = 1$ 이므로 a, b 는 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 근이고

$a^3 > b^3$ 이므로 $a > b$

$$\therefore a = 2 + \sqrt{3}, \quad b = 2 - \sqrt{3} \quad \therefore a - b = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{4 + 2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

15. $x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 일 때, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} \text{에서} \\ \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} &= a, \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} = b \text{라 하면} \\ x &= a - b, ab = -1 \\ x^3 &= (a - b)^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \\ &= \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3} - 2) + 3x = 4 + 3x \\ \therefore x^3 - 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4 & \\ &= (x^3 - 3x - 4)(x + 2) + 4 \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

16. 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$ 과 $y = mx$ 의 그래프가 만날 때, 실수 m 의 값의 범위는?

- ① $0 < m \leq \frac{1}{2}$ ② $0 \leq m < \frac{1}{2}$ ③ $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$
 ④ $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ ⑤ $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$

해설

$y = \sqrt{x-1}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 1 만큼평행이동한 것이고

또 $y = mx$ 는 원점을 지나는 직선이다. 다음 그림에서 곡선과 직선이 접하기 위해서는

$mx = \sqrt{x-1}$ 이 중근을 가져야 한다.

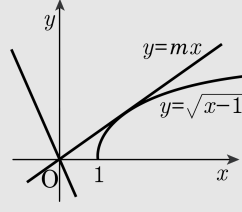
즉 $m^2x^2 - x + 1 = 0$ 에서

$D = 1 - 4m^2 = 0, \therefore m = \frac{1}{2} (\because m > 0)$

또한 $m = 0$ 일 때는 곡선과 직선이 점 (1, 0) 에서 만난다.

따라서 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$ 과 $y = mx$ 의 그래프가 만나기 위한 m 의 값의 범위는

$\therefore 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$



17. 함수 $y = \frac{x-3}{x-1}$ 과 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \frac{x-3}{x-1} = \frac{-2}{x-1} + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서, 주어진 분수함수의 그래프와 함수 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에

서 만나려면

$k \geq 3$ 이어야 하므로 k 의 최솟값은 3 이다.

