1. 임의의 양수 x, y에 대하여 항상 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(1) = 0$
② $f(6) = f(2) + f(3)$
③ $f(x^2) = f(2x)$
④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$
⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

해설

① $f(0) = f(1 \times 0) = f(1) + f(0)$

$\therefore \ f(1) = 0$

② $f(6) = f(2 \times 3) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④ $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(1) = 0$ 이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$= f(x) - f(y)(\because$ ④가참$)$

2. 집합 $D = \{x \mid -2a \le x \le a\}$ 에서 집합 $R = \{x \mid x \text{ 는 실수}\}$ 로의 함수 f 가 $f(x) = x^2 + b$ 이고 $f(D) = D$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, $ab \neq 0$)

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

해설

$a \ge -2a$ 이므로 $a > 0$

그림에서

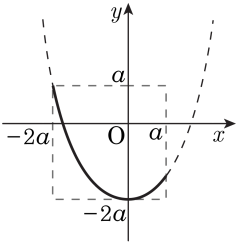
$f(0) = b = -2a \cdots$ ㉠

$$f(-2a) = 4a^2 + b$$
$$= a \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$a = \frac{3}{4},\ b = -\frac{3}{2}$

$\therefore a + b = -\frac{3}{4}$

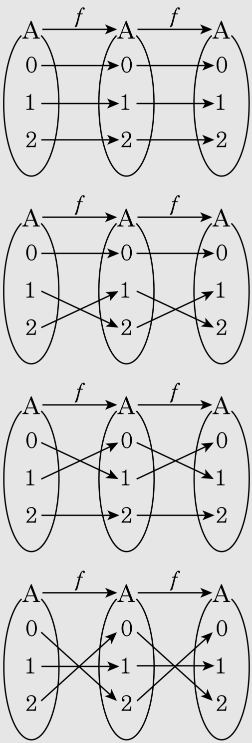


3. 임의의 자연수를 3 으로 나누었을 때, 나머지의 집합 A 에서 A 로의 함수 f 중 합성함수 $f \circ f$ 가 항등함수가 되는 f 의 개수를 구하여라.

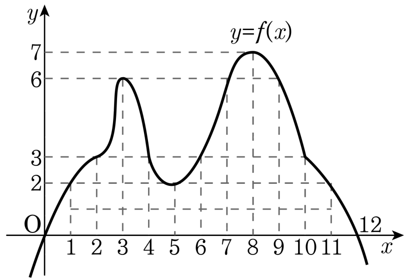
▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 4 개

해설



4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = (f \circ f)(x+2)$ 일 때, $g(x) = 6$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수는 몇 개인가? (단, $x < 0$ 또는 $x > 12$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$g(x) = 6$ 에서 $(f \circ f)(x+2) = 6$ 이므로,

$f(f(x+2)) = 6$

$x + 2 = t$ 로 놓으면 $f(f(t)) = 6$

$\therefore f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$ 또는 $f(t) = 9$

그런데 $f(t) \leq 7$ 이므로

$f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$

(i) $f(t) = 3$ 일 때,

$t = 2$ 또는 $t = 4$ 또는 $t = 6$ 또는 $t = 10$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = 8$

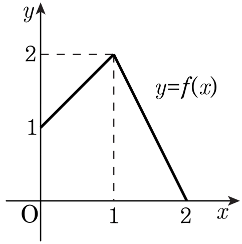
(ii) $f(t) = 7$ 일 때, $t = 8$

$\therefore x = 6$

(i) , (ii) 에서

실수 x 의 값은 0 , 2 , 4 , 6 , 8 의 5 개이다.

5. $0 \le x \le 2$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $f^{2000}\left(\frac{5}{4}\right)$의 값은? (단, $f^{1}(x) = f(x)$, $f^{2}(x) = f(f(x))$, $f^{3}(x) = f(f^{2}(x))$, $\cdots$, $f^{n+1}(x) = f(f^{n}(x))$, n은 자연수)



① 0 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ 2

해설

$0 < x < 1$ 범위에서 $f(x) = x + 1$
$1 < x < 2$ 범위에서 $f(x) = -2x + 4$이다.

이때 함수 $f\left(\frac{5}{4}\right)$는 5번째부터 3번마다

같은 것이 반복되는 경향을 보인다.

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

$$f^2\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

$$f^3\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^2\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2$$

$$f^4\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^3\left(\frac{5}{4}\right)\right) = 0$$

$$f^5\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^4\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(0) = 1$$

$$f^6\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^5\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2$$

$$\therefore\ f^{2000}\left(\frac{5}{4}\right) = f^{3\times666+2}\left(\frac{5}{4}\right) = f^2\left(\frac{5}{4}\right) = 1$$

6. $A = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f(x) = x^2 - 2$ 가 역함수를 갖게 되는 실수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

역함수를 가지려면 함수가 일대일 대응이 되어야 한다.
따라서 $f(x) \geq x$ 를 만족해야한다.
$\Rightarrow x^2 - 2 \geq x$
$\Rightarrow x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
$A = \{x \mid x \geq a\}$ 이므로 $a = 2$

7. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 가 아래와 같이 정의되었다고 하자.

$f(x)=\begin{cases} 2x-a & (x\le 0) \\ 3x+1 & (x\ge 0) \end{cases}$ 함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때, $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(4)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(x)=\begin{cases} 2x-a & (x\le 0) \\ 3x+1 & (x\ge 0) \end{cases}$$

$f(0)=1=-a$

$\therefore a=-1$

$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(4)=(f^{-1}\circ f^{-1})(4)$

$(f^{-1}\circ f^{-1})(4)=f^{-1}(f^{-1}(4))$

$f^{-1}(4)=k$ 라 하면 $f(k)=4$

$3k+1=4$ ($\because$ $x\le 0$ 에서 $2x+1\le 1$)$k=1$ 이고

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(4)=f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1)=m, f(m)=1$ 에서 $2m+1=1$ (또는 $3m+1=1$), $m=0$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(4)=0$

8. 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = g(x)$ 를 만족시킨다. $F(x) = f(x) - g(x)$ 라 정의할 때, <보기> 에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $F(x) = F(-x)$

㉡ $F(0) = 0$ 이면 $f(0) = g(0) = 0$ 이다.

㉢ $F(x) = 0$ 의 실근의 개수가 유한개이고 $f(0) = g(0)$ 이면
방정식 $F(x) = 0$ 의 실근의 개수는 항상 홀수이다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $F(-x) = f(-x) - g(-x)$
$= f(x) - g(x) = F(x)$ (참)

㉡ $F(0) = f(0) - g(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ (거짓)

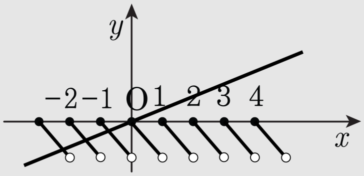
㉢ $y = F(x)$ 의 그래프가 y 축에 대칭이고
$f(0) = g(0)$ 이면 $F(0) = 0$ 이므로 방정식 $F(x) = 0$ 의 실근은
$0, \pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \cdots$ 로서 홀수 개이다. (참)

9. 함수 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프가 만나는 점은 a 개이고, 이 점들의 x 좌표의 합은 b 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① $-\frac{5}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$-3 \le x < -2$ 일 때, $[x] = -3$ 이므로
$y = [x] - x = -3 - x$
$-2 \le x < -1$ 일 때, $[x] = -2$ 이므로
$y = [x] - x = -2 - x$
$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ 이므로
$y = [x] - x = -1 - x$
$0 \le x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로
$y = [x] - x = -x$
$1 \le 2x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로
$y = [x] - x = 1 - x$
따라서 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 두 그래프가 만나는 점은 4 개이고
만나는 점의 x 좌표는 다음과 같다.

i) $-3 \le x < -2$ 일 때, $-3 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{9}{4}$

ii) $-2 \le x < -1$ 일 때, $-2 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$

iii) $-1 \le x < 0$ 일 때, $-1 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$

iv) $0 \le x < 1$ 일 때, $-x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = 0$

$\therefore\ a = 4\ ,\ b = \left(-\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2}$

$\therefore a + b = 4 + \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

10. 0 이 아닌 실수 a, b, c 가 다음 관계를 만족한다. $a^2+b^2+c^2=1$, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$ 일 때, $a+b+c$ 의 값들의 합을 구하면?

① -1　② 1　③ 0　④ 2　⑤ -2

해설

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}=-3$ 에서

$a+b+c=k\cdots$㉠으로 놓으면

$$\frac{k-a}{a}+\frac{k-b}{b}+\frac{k-c}{c}=-3$$

$$k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$$

$\therefore\ k=0$ 또는 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0\cdots$㉡

㉡ 에서 $ab+bc+ca=0$

㉠에서 $k^2=(a+b+c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$

$\therefore\ k=\pm1$

$\therefore\ k=0$ 또는 ±1

따라서 k 값들의 합은 0 이다.

11. 어느 도시의 택시 요금은 주행 거리 2 km 미만에서는 1000 원이고, 2 km 가 되는 순간에 1200 원이 되고 그 후부터는 매 500 m 증가할 때마다 200 원씩 요금이 추가된다고 한다. 택시를 타고 간 거리가 x km(단, $x > 2$) 일 때의 택시 요금을 나타내는 식은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다.)

① $1000 + 200[x]$
② $1000 + 200([x] - 1)$
③ $1000 + 200([x] - 1)$
④ $1000 + 200([x] - 2)$
⑤ $1000 + 200([2x] - 3)$

해설

거리 x가 $2 < x < 2.5$일 때
$4 < 2x < 5$이므로 $[2x] = 4$이고
요금은 $1000 + 200 \times 1 = 1000 + 200([2x] - 3)$ 원이다.
$2.5 \leq x < 3$일 때
$5 \leq 2x < 6$이므로 $[2x] = 5$이고
요금은 $1000 + 200 \times 2 = 1000 + 200([2x] - 3)$ 원이다.
$3 \leq x < 3.5$일 때
$6 \leq 2x < 7$이므로 $[2x] = 6$이고
요금은 $1000 + 200 \times 3 = 1000 + 200([2x] - 3)$ 원이다.
따라서 x km를 타고 갔을 때, 요금은
$1000 + 200([2x] - 3)$ 원이라고 추정할 수 있다.

12. 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x=-2$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y=2$ 이다.

③ 함수 $y=\dfrac{2}{x}+2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축을 지난다.

⑤ 함수 $y=\dfrac{-5}{x+2}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$$y=\frac{2x-1}{x+2}=\frac{2(x+2)-5}{x+2}=\frac{-5}{x+2}+2$$

그러므로 함수의 점근선은 $x=-2,\ y=2$이고

$y=\dfrac{-5}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 -2만큼,

y축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ③이다.

13. $abc \neq 0$ 인 실수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{|a|}{a} + \dfrac{\sqrt{b^2}}{b} + \dfrac{\sqrt{c^2}}{|c|} + \dfrac{\sqrt{(abc)^2}}{abc}$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\sqrt{b^2} = |b|$, $\sqrt{c^2} = |c|$, $\sqrt{(abc)^2} = |abc|$이므로

(주어진 식)$= \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} + 1 + \dfrac{|abc|}{abc}$에서

a, b, c의 양, 음에 따라 주어진 식의 값을 구해 보면

(i) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때,
(주어진 식)$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

(ii) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$일 때,
(주어진 식)$= 1 + 1 + 1 - 1 = 2$

(iii) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$일 때,
(주어진 식)$= 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

(iv) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$일 때,
(주어진 식)$= 1 - 1 + 1 + 1 = 2$

(v) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때,
(주어진 식)$= -1 + 1 + 1 - 1 = 0$

(vi) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$일 때,
(주어진 식)$= -1 + 1 + 1 + 1 = 2$

(vii) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$ 일 때,
(주어진 식)$= -1 - 1 + 1 + 1 = 0$

(viii) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$일 때,
(주어진 식)$= -1 - 1 + 1 - 1 = -2$

따라서 주어진 식의 값은 -2, 0, 2, 4 중 어느 하나이다.

14. a, b는 실수이고, $a^3 = 26 + 15\sqrt{3}$, $b^3 = 26 - 15\sqrt{3}$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 의 값을 구하면?

① $-2\sqrt{3}$　　② $-\sqrt{3}$　　③ $2\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$　　⑤ $-3\sqrt{3}$

해설

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 52$

$(ab)^3 = (26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3}) = 1 \qquad \therefore\ ab = 1$

$a + b = t$ 라 하면

$t^3 - 3t - 52 = 0, \quad (t-4)(t^2+4t+13) = 0$

a, b 가 실수이므로 t 도 실수이다.

$t = 4$ 이므로 $a + b = 4$

$$\text{준식} = \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$

$$= \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$$

$a + b = 4, \quad ab = 1$ 이므로 a, b 는 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 근이고

$a^3 > b^3$ 이므로 $a > b$

$\therefore\ a = 2+\sqrt{3}, \quad b = 2-\sqrt{3} \qquad \therefore\ a - b = 2\sqrt{3}$

$$\therefore\ (\text{준식}) = \frac{4+2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

15. $x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 일 때, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$ 의 값을 구하면?

① 4　　② 3　　③ 2　　④ 1　　⑤ 0

해설

$x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 에서

$\sqrt[3]{\sqrt{3}+2} = a,\ \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} = b$ 라 하면

$x = a - b,\ ab = -1$

$$\begin{aligned} x^3 &= (a-b)^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \\ &= \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3} - 2) + 3x = 4 + 3x \end{aligned}$$

$\therefore\ x^3 - 3x - 4 = 0$

$$\begin{aligned} \therefore\ & x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4 \\ &= (x^3 - 3x - 4)(x+2) + 4 \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

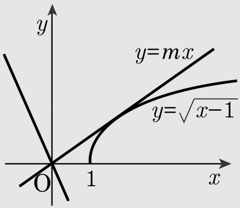
16. 두 함수 $y=\sqrt{x-1}$ 과 $y=mx$ 의 그래프가 만날 때, 실수 m 의 값의 범위는?

① $0<m\le\frac{1}{2}$ ② $0\le m<\frac{1}{2}$ ③ $0\le m\le\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{2}\le m<0$ ⑤ $-\frac{1}{2}\le m\le 0$

해설

$y=\sqrt{x-1}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼평행이동한 것이고
또 $y=mx$ 는 원점을 지나는 직선이다.
다음 그림에서 곡선과 직선이 접하기 위해서는
$mx=\sqrt{x-1}$ 이 중근을 가져야 한다.



즉 $m^2x^2-x+1=0$ 에서

$D=1-4m^2=0, \therefore\ m=\frac{1}{2}(\because\ m>0)$

또한 $m=0$ 일 때는 곡선과 직선이 점 $(1,\ 0)$ 에서 만난다.
따라서 두 함수 $y=\sqrt{x-1}$ 과 $y=mx$ 의 그래프가 만나기 위한 m 의 값의 범위는

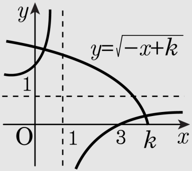
$\therefore 0\le m\le\frac{1}{2}$

17. 함수 $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ 과 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y = \dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{-2}{x-1} + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 주어진 분수함수의 그래프와 함수 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k \geq 3$ 이어야 하므로 k 의 최솟값은 3이다.