

1. 일차함수 $f(x)$ 는 실수 x 에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x)=x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101 ② -100 ③ 0 ④ 100 ⑤ 101

해설

$f(x) = ax + b$ 라 놓으면
 $x(ax + b) + a(1 - x) + b = x^2 + 2$
 $ax^2 + (-a + b)x + (a + b) = x^2 + 2$
위 식은 x 에 대한 항등식이므로
 $a = 1, b = 1$
이때 $f(x) = x + 1$ 이므로 $f(100) = 101$

2. 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수값을 가지는 함수이고, 다음을 만족한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

I. 임의의 실수 x, y 에 대하여
 $g(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$
II. $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$

- ① $g(0) = 1$

② $g(1) = 0$

③ $g(2) = -1$

④ $g(-1) = -2$

⑤ $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 1$

해설

I. 에서 $x = y$ 라 하면
 $g(0) = \{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 \dots \textcircled{1}$
i) $\textcircled{1}$ 에서 $x = 0$ 라 하면
 $g(0) = \{f(0)\}^2 + \{g(0)\}^2$
그런데 II. 에서 $f(0) = 0$ 이므로
 $g(0) = \{g(0)\}^2 \therefore g(0) = 0, 1$
만약, $g(0) = 0$ 라고 하면,
 $\textcircled{1}$ 에서 $0 = \{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2$ 이고
함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수값을 가지는 함수이므로
 $f(x) = 0$ 가 된다.
이것은 II. 에서 $f(1) = 1$ 이라는 것에 모순이다.
따라서 $g(0) = 1 \dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 에 의해서 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 1 \dots \textcircled{5}$
ii) $\textcircled{5}$ 에서 $x = 1$ 라 하면
 $1 = \{f(1)\}^2 + \{g(1)\}^2$
그런데 II. 에서 $f(1) = 1$ 이므로
 $g(1) = 0 \dots \textcircled{2}$
iii) $\textcircled{5}$ 에서 $x = -1$ 라 하면
 $1 = \{f(-1)\}^2 + \{g(-1)\}^2$
그런데 II. 에서 $f(-1) = -1$ 이므로
 $g(-1) = 0 \dots \textcircled{4}$
I. 에서 $x = 1, y = -1$ 라 하면
 $g(2) = f(1)f(-1) + g(1)g(-1)$
그런데 II. 에서 $f(-1) = -1, f(1) = 1$ 이고,
 $\textcircled{2}, \textcircled{4}$ 에 의해 $g(1) = 0, g(-1) = 0$ 이므로
 $g(2) = -1 \dots \textcircled{3}$

3. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 라 할 때, $f(3x)$ 를 $f(x)$ 로 나타내면?

① $\frac{f(x)}{f(x)-1}$

② $\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$

③ $\frac{f(x)}{f(x)+1}$

④ $\frac{3f(x)}{2f(x)-1}$

⑤ $\frac{f(x)}{2f(x)-1}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x-1} \text{ 에서 } x = \frac{f(x)}{f(x)-1} \\ \therefore f(3x) &= \frac{3x}{3x-1} = \frac{3 \cdot \frac{f(x)}{f(x)-1}}{3 \cdot \frac{f(x)}{f(x)-1} - 1} \\ &= \frac{3f(x)}{2f(x)+1} \end{aligned}$$

4. $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor + \left\lceil -\frac{1}{2}x + 1 \right\rceil$ 에 대하여 $f^1 = f, f^2 = f \circ f^1, f^3 = f \circ f^2, \dots, f^n = f \circ f^{n-1}$ 이라 할 때, $f^{2006}(3)$ 의 값은 얼마인가? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f^1(3), f^2(3), f^3(3), \dots$ 을 차례로 구하여 규칙을 발견한다.

$$f^1(3) = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lceil -\frac{3}{2} + 1 \right\rceil = 1 + \left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore f^1(3) = 0$$

$$\begin{aligned} f^2(3) &= (f \circ f^1)(3) = f(f^1(3)) \\ &= f(0) = \left\lfloor 0 \right\rfloor + \left\lceil 1 \right\rceil = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f^2(3) = 1$$

$$\begin{aligned} f^3(3) &= (f \circ f^2)(3) \\ &= f(f^2(3)) = f(1) = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f^3(3) = 0$$

$$f^4(3) = (f \circ f^3)(3) = f(f^3(3)) = f(0) = 1$$

$$\therefore f^4(3) = 1$$

$\vdots$

따라서 $f^n(3)$ 은 n 이 짝수일 때는 1, 홀수일 때는 0 이다.

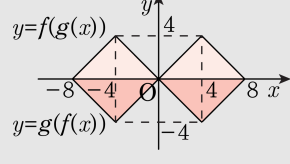
$$\therefore f^{2006}(3) = 1$$

5. 함수 $f(x) = 4 - |x|$, $g(x) = -4 + |x|$ 에서, $y = f(g(x))$ 와 $y = g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

해설

- i) $y = f(g(x)) = 4 - |-4 + |x||$ 에서
 $x \geq 4$ 일 때, $y = 4 - (-4 + x) = -x + 8$
 $0 \leq x < 4$ 일 때, $y = 4 + (-4 + x) = x$
 $-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = 4 + (-4 - x) = -x$
 $x < -4$ 일 때, $y = 4 - (-4 - x) = x + 8$
ii) $y = g(f(x)) = -4 + |4 - |x||$ 에서
 $x \geq 4$ 일 때, $y = -4 - (4 - x) = x - 8$
 $0 \leq x < 4$ 일 때, $y = -4 + (4 - x) = -x$
 $-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = -4 + (4 + x) = x$
 $x < -4$ 일 때, $y = -4 - (4 + x) = -x - 8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

$$\therefore 8 \times 8 = 64$$

6. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 X 에서 X 로의 함수 f 의 개수는?

- $\neg$

f 의 역함수가 존재한다.
- $f(1) = f^{-1}(1)$

- ① 12
- ② 14
- ③ 16
- ④ 18
- ⑤ 20

해설

함수 f 는 역함수를 가지므로 일대일 대응이어야 한다.
i) $f^{-1}(1) = f(1) = 1$ 일 때,
일대일 대응 $\{2, 3, 4\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$ 의 개수는 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (개)
ii) $f^{-1}(1) = f(1) = 2$ 일 때,
 $f(2) = 1$ 이므로 $\{3, 4\} \rightarrow \{3, 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)
iii) $f^{-1}(1) = f(1) = 3$ 일 때,
 $f(3) = 1$ 이므로 $\{2, 4\} \rightarrow \{2, 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)
iv) $f^{-1}(1) = f(1) = 4$ 일 때,
 $f(4) = 1$ 이므로 $\{2, 3\} \rightarrow \{2, 3\}$ 의 개수는
 $2 \cdot 1 = 2$ (개)
따라서, 구하는 함수의 개수는 $6 + 2 + 2 + 2 = 12$

7. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x) = 2g(x) + 1$

② $h(x) = 2g(x) - 1$

③ $h(x) = \frac{1}{2} \{g(x) + 1\}$

④ $h(x) = g(\frac{x}{2} + 1)$

⑤ $h(x) = \frac{1}{2}g(2x-1) + 1$

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$y = f(2x-1) \Leftrightarrow 2x-1 = g(y) \cdots \textcircled{1}$$

$f(2x-1)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로

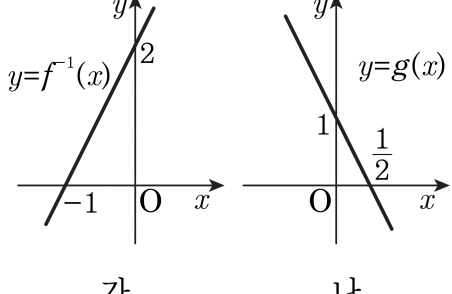
$$y = f(2x-1) \Leftrightarrow x = h(y) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } x \text{ 를 소거하면 } 2h(y) - 1 = g(h)$$

$$\text{그러므로 } h(y) = \frac{1}{2} \{g(h) + 1\}$$

$$\therefore h(x) = \frac{1}{2} \{g(x) + 1\}$$

8. 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



가

나

다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

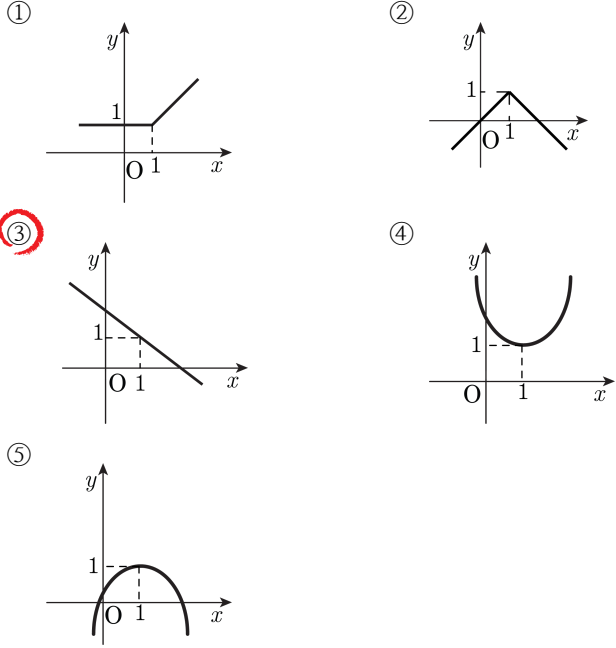
- ① $y = -f(x + 1)$
- ② $y = f(x - 1)$
- ③ $y = -f(x - 1)$
- ④ $y = f(x + 1)$
- ⑤ $y = -f(1 - x)$

해설

그림 (가)의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후
 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
그림 (나)의 그래프와 일치한다.
즉, $y = f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면
 $y = f^{-1}(-x) \cdots \text{㉠}$ 이다.
㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
 $y = f^{-1}(-x) - 1 \cdots \text{㉡}$ 이다.
㉡의 역함수는 $x = f^{-1}(-y) - 1 \cdots \text{㉢}$ 이므로
㉢에서 $f^{-1}(-y) = x + 1$ 이다.
 $\therefore y = -f(x + 1)$
 $\therefore g^{-1}(x) = -f(x + 1)$

9. 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때 다음 중 $y = f(x)$ 의 그래프가 될 수 있는 것은?

- I. $f(1) = 1$
II. 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{f(1+x) + f(1-x)}{2} = 1$



해설

$f(1+x)$, $f(1-x)$ 은 $x=1$ 에서
같은 거리만큼 떨어져 있는
두 개의 x 에 대한 함수값을 나타낸다.
이때, 모든 실수 x 에 대하여 II가 성립한다는 것은
 $x=1$ 에서 같은 거리만큼 떨어져 있는
두 개의 x 에 대한 함수값의 평균이
항상 1 이라는 뜻이므로
함수 $y = f(x)$ 의 그래프는
점(1, 1) 에 대하여 대칭이다.
따라서, 보기의 그래프 중 점(1, 1) 에 대하여 대칭인 그래프는
③이다.

10. 분수식 $\frac{3x}{x+2} + \frac{2x}{x-2} + \frac{5x^2-2x}{x^2+4}$ 를 간단히 하면?

- ① $\frac{x^2+5}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$ ② $\frac{5x^2-4}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$
③ $\frac{2x^3(5x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$ ④ $\frac{2x^2(5x^2+2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$
⑤ $\frac{4x^2(5x^2-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2+4x+3x^2-6x}{x^2-4} + \frac{5x^2-2x}{x^2+4} \\ &= \frac{5x^2-2x}{x^2-4} + \frac{5x^2-2x}{x^2+4} \\ &= \frac{(5x^2-2x)(x^2+4+x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+4)} \\ &= \frac{2x^3(5x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} \end{aligned}$$

11. 0이 아닌 서로 다른 세 실수 x, y, z 가 $x + \frac{2}{y} = y + \frac{2}{z} = z + \frac{2}{x}$ 를 만족할 때, xyz 의 값을 구하면?

- ① $\pm \sqrt{2}$
- ② ± 3
- ③ $\pm 3\sqrt{2}$
- ④ $\pm 2\sqrt{2}$
- ⑤ $\pm 4\sqrt{2}$

해설

$$x + \frac{2}{y} = y + \frac{2}{z} \text{ 에서 } x - y = \frac{2(y - z)}{yz}$$
$$y + \frac{2}{z} = z + \frac{2}{x} \text{ 에서 } y - z = \frac{2(z - x)}{zx}$$
$$z + \frac{2}{x} = x + \frac{2}{y} \text{ 에서 } z - x = \frac{2(x - y)}{xy}$$
$$\therefore (x - y)(y - z)(z - x) = \frac{8(x - y)(y - z)(z - x)}{(xyz)^2}$$
$$x, y, z \text{가 서로 다른 실수이므로 } (xyz)^2 = 8$$
$$\therefore xyz = \pm 2\sqrt{2}$$

12. 함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(2x)$ 를 $f(x)$ 로 나타내면 ?

- ① $\frac{2f(x)}{2f(x)-1}$ ② $\frac{2f(x)}{2f(x)+1}$ ③ $\frac{2f(x)}{f(x)-1}$
 ④ $\frac{2f(x)}{f(x)+1}$ ⑤ $\frac{2f(x)}{f(x)-2}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x-1} \text{ 에서 } x = \frac{f(x)}{f(x)-1} \\ 2x &= \frac{2f(x)}{f(x)-1} \\ f(2x) &= f\left(\frac{2f(x)}{f(x)-1}\right) = \frac{\frac{2f(x)}{f(x)-1}}{\frac{2f(x)}{f(x)-1}-1} \\ &= \frac{2f(x)}{2f(x)-f(x)+1} = \frac{2f(x)}{f(x)+1} \end{aligned}$$

13. 양의 정수 k 에 대하여 $\sqrt{4k^2+1}$ 의 정수 부분은 a , 소수 부분을 b 라 할때, $\frac{b}{a}$ 를 k 에 관한 식으로 옳게 표현한 것은?

- ① $\frac{1}{4k^2+1}$ ② $\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}}$ ③ $\sqrt{\frac{1}{4k^2}+1}-1$
④ $\sqrt{4k^2+1}-k^2$ ⑤ $k^2-\frac{1}{4}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4k^2} &< \sqrt{4k^2+1} < \sqrt{4k^2+4k+1} \\ \Rightarrow 2k &< \sqrt{4k^2+1} < 2k+1 \\ \Rightarrow \text{정수 부분 : } 2k &\text{ 소수 부분 : } \sqrt{4k^2+1}-2k \\ \therefore \frac{b}{a} &= \frac{\sqrt{4k^2+1}-2k}{2k} = \frac{\sqrt{4k^2+1}}{2k} - 1 \\ &= \sqrt{\frac{1}{4k^2}+1} - 1\end{aligned}$$

14. $\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} (a > 1)$ 일 때, $\frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{x+2+\sqrt{x^2-4x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{a(a-2)}$

② $\frac{1}{2a+4}$

③ $\frac{a}{2a+4}$

④ $\frac{a}{a+2}$

⑤ $\frac{1}{a(a+2)}$

해설

제곱하면 $x = a + \frac{1}{a} + 2$

$x - 2 = a + \frac{1}{a}$ 로부터,

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4$$

$$= \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$$

그런데 $a > 1$ 로부터, $a - \frac{1}{a} > 0$

$\therefore \sqrt{x^2 - 4x} = a - \frac{1}{a}$ 에서 주어진 식

$$= \frac{\frac{2}{a}}{2a+4} = \frac{1}{a(a+2)}$$

15. $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{\sqrt[3]{65}}{4}$

③ $\frac{1+\sqrt[6]{13}}{2}$

④ $\sqrt[3]{2}$

⑤ 1

해설

$a = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}, b = \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 이라고 하면

$$a^3 + b^3 = 10, ab = -3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b),$$

$a+b = x$ 라고 하면,

$$x^3 + 9x - 10 = 0,$$

$$(x-1)(x^2 + x + 10) = 0$$

$$\therefore x = 1$$

16. $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x-3}\} \cap \{(x, y) \mid y = mx + 1\} \neq \emptyset$ 인 m 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$
- ② $-\frac{1}{3}$
- ③ $-\frac{1}{5}$
- ④ $-\frac{1}{6}$
- ⑤ $-\frac{1}{9}$

해설

$y = \sqrt{x-3}$ ㉠은
 $y = \sqrt{x}$ 를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
 $y = mx + 1$ ㉡의 y 절편은 항상 1이다.
㉡식이 (3, 0)을 지날 때, $m = -\frac{1}{3}$... ㉢
㉡식이 ㉠식에 접할 때,
 $\sqrt{x-3} = mx + 1$ 에서 양변 제곱하여 정리하면
 $m^2x^2 + (2m-1)x + 4 = 0$
 $D = 0$ 에서 $m = \frac{1}{6}, -\frac{1}{2}$
 $m > 0$ 이므로 $m = \frac{1}{6}$... ㉣
㉢, ㉣으로부터
 $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{6} \quad \therefore a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{3}$
 $\therefore a + b = -\frac{1}{6}$

17. 무리함수 $y = \sqrt{x+2} + 2$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, 연립방정식

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+2} + 2 \\ y = g(x) \end{cases} \quad \text{의 근을 } x = \alpha, y = \beta \text{라 하자. 이 때, } \alpha^2 - 5\beta \text{의}$$

값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x+2} + 2$, $y = g(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 그림과 같이
그 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다.

즉, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} + 2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근

은

$y = x$ 를 만족한다. ($\alpha = \beta$)

따라서, $y = \sqrt{x+2} + 2$ 와 $y = x$ 를 연립하면
된다.

$$x = \sqrt{x+2} + 2 \text{ 에서 } x - 2 = \sqrt{x+2}$$

$$x^2 - 4x + 4 = x + 2$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - 5\beta = \alpha^2 - 5\alpha \quad (\because \alpha = \beta) \\ = -2$$

