1. 일차함수 $f(x)$는 실수 x에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x)=x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101 ② -100 ③ 0 ④ 100 ⑤ 101

해설

$f(x)=ax+b$ 라 놓으면

$x(ax+b)+a(1-x)+b=x^2+2$

$ax^2+(-a+b)x+(a+b)=x^2+2$

위 식은 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ b=1$

이때 $f(x)=x+1$ 이므로 $f(100)=101$

2. 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수값을 가지는 함수이고, 다음을 만족한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

Ⅰ. 임의의 실수 x, y 에 대하여
$$g(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$$
Ⅱ. $f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$

① $g(0)=1$
② $g(1)=0$
③ $g(2)=-1$
④ $g(-1)=-2$
⑤ $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1$

해설

Ⅰ.에서 $x=y$ 라 하면
$g(0)=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2 \ \cdots$ ㉠
ⅰ) ㉠에서 $x=0$ 라 하면
$$g(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2$$
그런데 Ⅱ.에서 $f(0)=0$ 이므로
$g(0)=\{g(0)\}^2 \qquad \therefore\ g(0)=0,\ 1$
만약, $g(0)=0$ 라고 하면,
㉠에서 $0=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ 이고
함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수값을 가지는 함수이므로
$f(x)=0$ 가 된다.
이것은 Ⅱ.에서 $f(1)=1$ 이라는 것에 모순이다.
따라서 $g(0)=1 \ \cdots$ ①
㉠에 의해서 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1 \ \cdots$ ⑤
ⅱ) ⑤에서 $x=1$ 라 하면
$$1=\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2$$
그런데 Ⅱ.에서 $f(1)=1$ 이므로
$g(1)=0 \ \cdots$ ②
ⅲ) ⑤에서 $x=-1$ 라 하면
$$1=\{f(-1)\}^2+\{g(-1)\}^2$$
그런데 Ⅱ.에서 $f(-1)=-1$ 이므로
$g(-1)=0 \ \cdots$ ④
Ⅰ.에서 $x=1$, $y=-1$ 라 하면
$g(2)=f(1)f(-1)+g(1)g(-1)$
그런데 Ⅱ.에서 $f(-1)=-1$, $f(1)=1$ 이고,
②, ④에 의해 $g(1)=0$, $g(-1)=0$ 이므로
$g(2)=-1 \ \cdots$ ③

3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 라 할 때, $f(3x)$를 $f(x)$로 나타내면?

① $\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$　② $\dfrac{3f(x)}{2f(x)+1}$　③ $\dfrac{f(x)}{f(x)+1}$

④ $\dfrac{3f(x)}{2f(x)-1}$　⑤ $\dfrac{f(x)}{2f(x)-1}$

해설

$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 에서 $x = \dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$$\therefore f(3x) = \frac{3x}{3x-1} = \frac{3\dfrac{f(x)}{f(x)-1}}{3\dfrac{f(x)}{f(x)-1}-1}$$

$$= \frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

4. $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] + \left[-\frac{1}{2}x+1\right]$ 에 대하여 $f^1 = f, f^2 = f \circ f^1, f^3 = f \circ f^2, \cdots, f^n = f \circ f^{n-1}$ 이라 할 때, $f^{2006}(3)$ 의 값은 얼마인가? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f^1(3), f^2(3), f^3(3), \cdots$ 을
차례로 구하여 규칙을 발견한다.

$$f^1(3) = \left[\frac{3}{2}\right] + \left[-\frac{3}{2}+1\right] = 1 + \left[-\frac{1}{2}\right] = 1 - 1 = 0$$

$\therefore f^1(3) = 0$

$$\begin{aligned} f^2(3) &= (f \circ f^1)(3) = f(f^1(3)) \\ &= f(0) = [0] + [1] = 1 \end{aligned}$$

$\therefore f^2(3) = 1$

$$\begin{aligned} f^3(3) &= (f \circ f^2)(3) \\ &= f(f^2(3)) = f(1) = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] = 0 \end{aligned}$$

$\therefore f^3(3) = 0$

$f^4(3) = (f \circ f^3)(3) = f(f^3(3)) = f(0) = 1$

$\therefore f^4(3) = 1$

$\vdots$

따라서 $f^n(3)$ 은 n 이
짝수일 때는 1, 홀수일 때는 0 이다.

$\therefore f^{2006}(3) = 1$

5. 함수 $f(x)=4-|x|,\ g(x)=-4+|x|$ 에서, $y=f(g(x))$ 와 $y=g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

해설

i) $y=f(g(x))=4-|-4+|x||$ 에서

$x\ge 4$ 일 때, $y=4-(-4+x)=-x+8$

$0\le x<4$ 일 때, $y=4+(-4+x)=x$

$-4\le x<0$ 일 때, $y=4+(-4-x)=-x$

$x<-4$ 일 때, $y=4-(-4-x)=x+8$

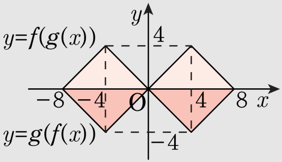
ii) $y=g(f(x))=-4+|4-|x||$ 에서

$x\ge 4$ 일 때, $y=-4-(4-x)=x-8$

$0\le x<4$ 일 때, $y=-4+(4-x)=-x$

$-4\le x<0$ 일 때, $y=-4+(4+x)=x$

$x<-4$ 일 때, $y=-4-(4+x)=-x-8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

$\therefore\ 8\times 8=64$

6. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 X 에서 X 로의 함수 f 의 개수는?

(가) f 의 역함수가 존재한다.
(나) $f(1) = f^{-1}(1)$

① 12　　② 14　　③ 16　　④ 18　　⑤ 20

해설

함수 f 는 역함수를 가지므로 일대일 대응이어야 한다.

i) $f^{-1}(1) = f(1) = 1$ 일 때,

일대일 대응 $\{2,\ 3,\ 4\} \rightarrow \{2,\ 3,\ 4\}$ 의 개수는 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (개)

ii) $f^{-1}(1) = f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = 1$ 이므로 $\{3,\ 4\} \rightarrow \{3,\ 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

iii) $f^{-1}(1) = f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = 1$ 이므로 $\{2,\ 4\} \rightarrow \{2,\ 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

iv) $f^{-1}(1) = f(1) = 4$ 일 때,

$f(4) = 1$ 이므로 $\{2,\ 3\} \rightarrow \{2,\ 3\}$ 의 개수는

$2 \cdot 1 = 2$ (개)

따라서, 구하는 함수의 개수는 $6 + 2 + 2 + 2 = 12$

7. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x) = 2g(x) + 1$

② $h(x) = 2g(x) - 1$

③ $h(x) = \frac{1}{2}\{g(x) + 1\}$

④ $h(x) = g(\frac{x}{2} + 1)$

⑤ $h(x) = \frac{1}{2}g(2x-1) + 1$

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$y = f(2x-1) \Leftrightarrow 2x-1 = g(y) \cdots$ ㉠

$f(2x-1)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로

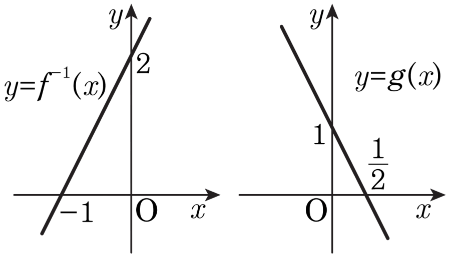
$y = f(2x-1) \Leftrightarrow x = h(y) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 x 를 소거하면 $2h(y) - 1 = g(h)$

그러므로 $h(y) = \frac{1}{2}\{g(h) + 1\}$

$\therefore\ h(x) = \frac{1}{2}\{g(x) + 1\}$

8. 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



가　　　　나

다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

① $y = -f(x+1)$　② $y = f(x-1)$　③ $y = -f(x-1)$

④ $y = f(x+1)$　⑤ $y = -f(1-x)$

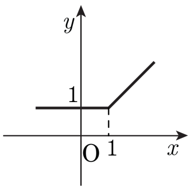
해설

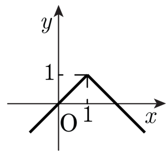
그림 (가) 의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
그림 (나) 의 그래프와 일치한다.
즉, $y = f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면
$y = f^{-1}(-x) \cdots$ ㉠이다.
㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
$y = f^{-1}(-x) - 1 \cdots$ ㉡이다.
㉡의 역함수는 $x = f^{-1}(-y) - 1 \cdots$ ㉢이므로
㉢에서 $f^{-1}(-y) = x + 1$ 이다.
$\therefore y = -f(x+1)$
$\therefore g^{-1}(x) = -f(x+1)$

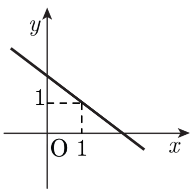
9. 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때 다음 중 $y=f(x)$ 의 그래프가 될 수 있는 것은?

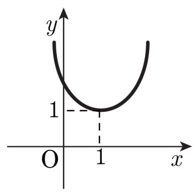
Ⅰ. $f(1)=1$

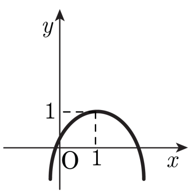
Ⅱ. 모든 실수 x 에 대하여 $\dfrac{f(1+x)+f(1-x)}{2}=1$

①


②


③


④


⑤


해설

$f(1+x),\ f(1-x)$ 은 $x=1$ 에서
같은 거리만큼 떨어져 있는
두 개의 x 에 대한 함수값을 나타낸다.
이때, 모든 실수 x 에 대하여 Ⅱ가 성립한다는 것은
$x=1$ 에서 같은 거리만큼 떨어져 있는
두 개의 x 에 대한 함수값의 평균이
항상 1 이라는 뜻이므로
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
점$(1,\ 1)$ 에 대하여 대칭이다.
따라서, 보기의 그래프 중 점$(1,\ 1)$ 에 대하여 대칭인 그래프는
③이다.

10. 분수식 $\dfrac{3x}{x+2}+\dfrac{2x}{x-2}+\dfrac{5x^2-2x}{x^2+4}$를 간단히 하면?

① $\dfrac{x^2+5}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$
② $\dfrac{5x^2-4}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$
③ $\dfrac{2x^3(5x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$
④ $\dfrac{2x^2(5x^2+2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$
⑤ $\dfrac{4x^2(5x^2-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

해설

$$\frac{2x^2+4x+3x^2-6x}{x^2-4}+\frac{5x^2-2x}{x^2+4}$$

$$=\frac{5x^2-2x}{x^2-4}+\frac{5x^2-2x}{x^2+4}$$

$$=\frac{(5x^2-2x)(x^2+4+x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+4)}$$

$$=\frac{2x^3(5x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

11. 0이 아닌 서로 다른 세 실수 x, y, z가 $x+\frac{2}{y}=y+\frac{2}{z}=z+\frac{2}{x}$를 만족할 때, xyz의 값을 구하면?

① $\pm\sqrt{2}$ ② ± 3 ③ $\pm 3\sqrt{2}$

④ $\pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $\pm 4\sqrt{2}$

해설

$x+\frac{2}{y}=y+\frac{2}{z}$에서 $x-y=\frac{2(y-z)}{yz}$

$y+\frac{2}{z}=z+\frac{2}{x}$에서 $y-z=\frac{2(z-x)}{zx}$

$z+\frac{2}{x}=x+\frac{2}{y}$에서 $z-x=\frac{2(x-y)}{xy}$

$\therefore\ (x-y)(y-z)(z-x)=\frac{8(x-y)(y-z)(z-x)}{(xyz)^2}$

$x,\ y,\ z$가 서로 다른 실수이므로 $(xyz)^2=8$

$\therefore\ xyz=\pm 2\sqrt{2}$

12. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(2x)$를 $f(x)$로 나타내면 ?

① $\dfrac{2f(x)}{2f(x)-1}$ ② $\dfrac{2f(x)}{2f(x)+1}$ ③ $\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}$

④ $\dfrac{2f(x)}{f(x)+1}$ ⑤ $\dfrac{2f(x)}{f(x)-2}$

해설

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에서 $x=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$$2x=\frac{2f(x)}{f(x)-1}$$

$$f(2x)=f\left(\frac{2f(x)}{f(x)-1}\right)=\frac{\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}}{\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}-1}$$

$$=\frac{2f(x)}{2f(x)-f(x)+1}=\frac{2f(x)}{f(x)+1}$$

13. 양의 정수 k에 대하여 $\sqrt{4k^2+1}$의 정수 부분은 a, 소수 부분을 b라 할때, $\frac{b}{a}$를 k에 관한 식으로 옳게 표현한 것은?

① $\frac{1}{4k^2+1}$　② $\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}}$　③ $\sqrt{\frac{1}{4k^2}+1}-1$

④ $\sqrt{4k^2+1}-k^2$　⑤ $k^2-\frac{1}{4}$

해설

$\sqrt{4k^2} < \sqrt{4k^2+1} < \sqrt{4k^2+4k+1}$

$\Rightarrow 2k < \sqrt{4k^2+1} < 2k+1$

$\Rightarrow$ 정수 부분 : $2k$ 소수 부분 : $\sqrt{4k^2+1}-2k$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{4k^2+1}-2k}{2k} = \frac{\sqrt{4k^2+1}}{2k}-1$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4k^2}+1}-1$$

14. $\sqrt{x} = \sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}(a > 1)$ 일 때, $\dfrac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{x+2+\sqrt{x^2-4x}}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{a(a-2)}$ ② $\dfrac{1}{2a+4}$ ③ $\dfrac{a}{2a+4}$

④ $\dfrac{a}{a+2}$ ⑤ $\dfrac{1}{a(a+2)}$

해설

제곱하면 $x = a + \dfrac{1}{a} + 2$

$x - 2 = a + \dfrac{1}{a}$ 로부터,

$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$

$= \left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 - 4$

$= \left(a - \dfrac{1}{a}\right)^2$

그런데 $a > 1$ 로부터, $a - \dfrac{1}{a} > 0$

$\therefore \sqrt{x^2 - 4x} = a - \dfrac{1}{a}$ 에서 주어진 식

$= \dfrac{\frac{2}{a}}{2a+4} = \dfrac{1}{a(a+2)}$

15. $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{3}{2}$　② $\dfrac{3\sqrt{65}}{4}$　③ $\dfrac{1+6\sqrt{13}}{2}$

④ $3\sqrt{2}$　⑤ 1

해설

$a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}},\ b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 이라고 하면

$a^3+b^3=10,\ ab=-3,$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),$

$a+b=x$ 라고 하면,

$x^3+9x-10=0,$

$(x-1)(x^2+x+10)=0$

$\therefore\ x=1$

16. $\{(x,\ y) \mid y = \sqrt{x-3}\} \cap \{(x,\ y) \mid y = mx+1\} \neq \varnothing$ 인 m 의 최댓값을 a, 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $-\dfrac{1}{5}$ ④ $-\dfrac{1}{6}$ ⑤ $-\dfrac{1}{9}$

해설

$y = \sqrt{x-3}$ ·········· ①은

$y = \sqrt{x}$ 를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y = mx+1$ ·········· ②의 y 절편은 항상 1이다.

②식이 $(3,\ 0)$ 을 지날 때, $m = -\dfrac{1}{3} \cdots$ ㉠

②식이 ① 식에 접할 때,

$\sqrt{x-3} = mx+1$ 에서 양변 제곱하여 정리하면

$m^2x^2 + (2m-1)x + 4 = 0$

$D = 0$ 에서 $m = \dfrac{1}{6},\ -\dfrac{1}{2}$

$m > 0$ 이므로 $m = \dfrac{1}{6} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡으로부터

$-\dfrac{1}{3} \le m \le \dfrac{1}{6} \quad \therefore\ a = \dfrac{1}{6},\ b = -\dfrac{1}{3}$

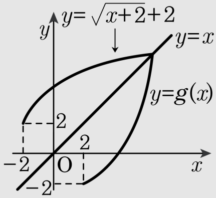
$\therefore\ a+b = -\dfrac{1}{6}$

17. 무리함수 $y = \sqrt{x+2}+2$의 역함수를 $y = g(x)$라 할 때, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2}+2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha,\ y = \beta$라 하자. 이 때, $\alpha^2 - 5\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설



두 함수 $y = \sqrt{x+2}+2$, $y = g(x)$의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 그림과 같이
그 교점은 직선 $y = x$위에 있다.

즉, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2}+2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근은
$y = x$를 만족한다. $(\alpha = \beta)$
따라서, $y = \sqrt{x+2}+2$ 와 $y = x$를 연립하면 된다.

$x = \sqrt{x+2}+2$ 에서 $x-2 = \sqrt{x+2}$

$x^2 - 4x + 4 = x + 2$

$x^2 - 5x + 2 = 0$

$\therefore\ \alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$

$\therefore\ \alpha^2 - 5\beta = \alpha^2 - 5\alpha\ (\because\ \alpha = \beta)$

$= -2$