**1.** 모든 실수 $x$ 에 대하여 정의된 함수 $f(x) = [x] + [-x]$ 의 치역은? (단, $[x]$ 는 $x$ 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $\{-1,\ 0\}$　② $\{-1,\ 1\}$　③ $\{0,\ 1\}$
④ $\{-1,\ 0,\ 1\}$　⑤ $\{0\}$

해설

정수 $n$ 에 대하여
( i ) $x = n$ 이면
$f(x) = [x] + [-x] = n + (-n) = 0$
( ii ) $n < x < n + 1$ 이면
$-n - 1 < -x < -n$ 이므로 $[-x] = -n - 1$
$\therefore\ f(x) = [x] + [-x] = n + (-n - 1) = -1$
( i ), ( ii ) 에서 구하는 치역은 $\{-1,\ 0\}$ 이다.

**2.** 자연수에서 정의된 함수 $f$ 가 임의의 자연수 $n$ 에 대하여 관계식 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4) + 3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$ )

① $2f(6)$ ② $2f(7)$ ③ $f(7)$ ④ $f(8)$ ⑤ $f(9)$

해설

주어진 관계식 $f(n+2) = (n+1)+f(n)$ 을 이용하여 $f(4)+f(5) = f(6)$ 이므로

$$\begin{aligned} 2f(4) + 3f(5) &= f(4) + f(5) + f(4) + f(5) + f(5) \\ &= f(6) + f(6) + f(5) \end{aligned}$$

또 $f(5) + f(6) = f(7), f(6) + f(7) = f(8)$ 이므로

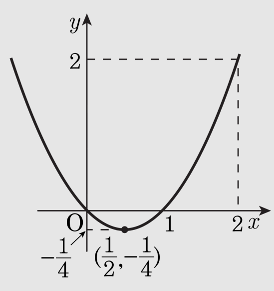
$2f(4) + 3f(5) = f(6) + f(7) = f(8)$ 이다.

**3.** $f(x) = x^2 - x$ 로 나타내어지는 함수 $f : A \rightarrow A$ 는 $A = \{x \mid x \geq a\}$ 이면 일대일대응이다. $a$ 의 값을 구하면 ?

① 4　② 2　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ 0

해설

$f : A \rightarrow A$ 가 일대일함수이므로




그림에서 $a \geq \frac{1}{2}$ 이고 또한 일대일대응이므로

$A = \{x \mid x \geq a\}$ 에서 $f(a) = a$ 이어야 한다.

$f(x) = x^2 - x$ 에서 $f(a) = a$ 이므로

$a^2 - a = a \rightarrow a^2 - 2a = 0$

$\therefore\ a = 0,\ 2$

그런데, $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore\ a = 2$

**4.** 함수 $f(x)=2x+1$에 대하여 $f\circ f=f^2$, $f\circ f\circ f=f^3$, $\cdots$, $f\circ f\circ\cdots\circ f=f^n$ 이라 할 때, $f^{10}(1)$ 의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2047 ⑤ 2048

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$
$(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ(f\circ f))(x)=f((f\circ f)(x))=f(4x+3)=2(4x+3)+1=8x+7$

$$\vdots$$

$\therefore f^{10}(x)=2^{10}x+(2^{10}-1)=1024x+1023$
$\therefore f^{10}(1)=1024\times 1+1023=2047$

**5.** 함수 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라고 할 때, 다음 중 함수 $f(3x-2)$의 역함수는?

① $\frac{1}{3}\{g(x)+2\}$　② $\frac{1}{3}\{g(x)-2\}$　③ $3g(x)-2$
④ $3g(x)+2$　⑤ $\frac{1}{2}\{g(x)-3\}$

해설

$y=f(3x-2)$의 역함수를 구하기 위하여 $x$, $y$를 바꾸면
$x=f(3y-2)$
$\therefore 3y-2=f^{-1}(x)=g(x)$
$\therefore y=\frac{1}{3}\{g(x)+2\}$

**6.** 함수 $f(x) = x|x| + k$ ($k$ 는 상수) 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라고 할 때, $f^{-1}(4) = -1$ 이다. 이때, $\left(f^{-1} \circ f^{-1}\right)(4)$ 의 값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{6}$ ⑤ $-\sqrt{7}$

해설

$f^{-1}(4) = -1$ 에서 $f(-1) = 4$

$f(-1) = -1 + k = 4$ 에서 $k = 5$

$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & (x \geq 0) \\ -x^2 + 5 & (x < 0) \end{cases}$

$\left(f^{-1} \circ f^{-1}\right)(4) = f^{-1}(f^{-1}(4)) = f^{-1}(-1) = a$ 로 놓으면 $f(a) = -1$

이 때, $f(a) < 0$ 이므로 $a < 0$

따라서, $f(a) = -a^2 + 5 = -1$ 이므로

$a = -\sqrt{6}$ ($\because a < 0$ )

$\therefore \left(f^{-1} \circ f^{-1}\right)(4) = -\sqrt{6}$

**7.** 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$ 에 대하여 $g(x)=f(x-2)$ 라할 때, $g^{-1}(9)$ 의 값은? (단, $g^{-1}(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=f(x-2)$ 이므로

$g(x)=\begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x-2 & (x<2) \end{cases}$

$g^{-1}(9)=k$ 라 하면 $g(k)=9$

$k \geq 2$ 일 때, $(k-2)^2=9$ 에서 $k=5$

$k<2$ 일 때, $k-2=9$ 를 만족하는 $k$ 가 없다.

$\therefore\ g^{-1}(9)=5$

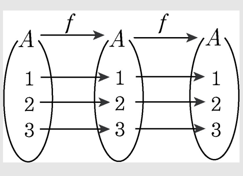
**8.** 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 집합 $A$ 에서 $A$ 로의 함수 중 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수 $f$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

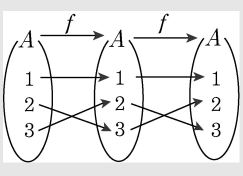
▷ 정답 : 4 개

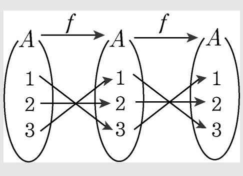
해설

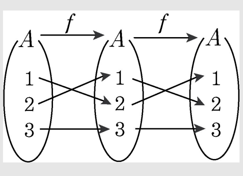
i) $f(x) = x$ 인 경우 1 개



ii) 1 개의 원소는 자기 자신에 대응되고, 나머지 2 개의 원소는 서로 엇갈려 대응되면 된다.
자기 자신에 대응되는 원소가 1, 2, 3 인 3 가지 경우가 있다.







i), ii) 에서 구하는 함수 $f$ 의 개수는 $1 + 3 = 4$(개)

**9.** 두 함수 $f(x)$ , $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 우함수, $g(x)$ 는 기함수이고, $f(4)=1,\ g(1)=-3$ 일 때, $f(-4)+g(-1)$ 의 값은?

① $-4$ ② $-2$ ③ $0$ ④ $2$ ⑤ $4$

해설

$f(x)$ 는 우함수이므로 $f(-4)=f(4)=1$ $g(x)$ 는 기함수이므로
$g(-1)=-g(1)=3$
$\therefore f(-4)+g(-1)=1+3=4$

**10.** $a,\ b,\ c$가 실수일 때, $a+b=4ab,\ b+c=6bc,\ c+a=8ca$이다. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값을 구한 것은?

① $\frac{1}{18}$　② $\frac{1}{9}$　③ 9　④ 18　⑤ 1

해설

준식을 변형하면 $\frac{a+b}{ab}=4\cdots$①

$\frac{b+c}{bc}=6\cdots$②

$\frac{c+a}{ca}=8\cdots$③에서

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=4\cdots$①$'$

$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{b+c}{bc}=6\cdots$②$'$

$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{a+c}{ca}=8\cdots$③$'$

①$'$ + ②$'$ + ③$'$ 하면

$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=18$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=9$

**11.** 서울시의 전기 요금은 100kWh 이내로 사용한 경우는 6000 원이고, 100kWh 이상은 10kWh 증가할 때마다 1000 원씩 요금이 추가된다고 한다. 사용한 전기의 양을 $A$kWh , 전기 요금을 $B$원이라고 할 때, $A$와 $B$의 관계식은? (단, $A \geq 100$이고, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다.)

① $B=5000+1000\left[\frac{A-100}{10}\right]$
② $B=6000+1000\left[\frac{A-100}{10}\right]$
③ $B=6000+1000\left[\frac{A-101}{10}\right]$
④ $B=6000+1000\left[\frac{A-100}{11}\right]$
⑤ $B=6000+1000\left[\frac{A-101}{11}\right]$

해설

$100\text{kWh} \leq A < 110\text{kWh}$ 일 때, $B=6000+1000\times 0$
$110\text{kWh} \leq A < 120\text{kWh}$ 일 때, $B=6000+1000\times 1$
$120\text{kWh} \leq A < 130\text{kWh}$ 일 때, $B=6000+1000\times 2$
$\vdots$
$\therefore\ B=6000+1000\left[\frac{A-100}{10}\right]$

**12.** $a$, $b$가 양수일 때, $2 \le x \le 3$을 만족하는 임의의 실수 $x$에 대하여 $ax + 2 \le \dfrac{2x-1}{x-1} \le bx + 2$가 성립할 때, $a$의 최댓값과 $b$의 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{2}{3}$　　② $1$　　③ $\dfrac{4}{3}$　　④ $\dfrac{5}{3}$　　⑤ $2$

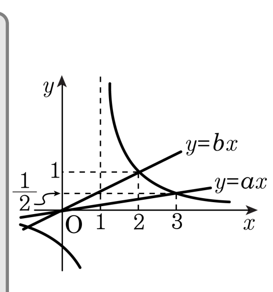
해설

$\dfrac{2x-1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ $(2 \le x \le 3)$이므로

$ax + 2 \le 2 + \dfrac{1}{x-1} \le bx + 2$

$ax \le \dfrac{1}{x-1} \le bx$

위의 그래프에 의하여 $a \le \dfrac{1}{6}$, $b \ge \dfrac{1}{2}$



**13.** $x = a^2 + b^2$, $y = \frac{3}{2}ab$ 라 할 때, $\sqrt{(x+y)^2} - \sqrt{(x-y)^2}$ 을 간단히 하면?

① $-2(a^2+b^2)$ ② $-3ab$ ③ $2(a^2+b^2)$

④ $3ab$ ⑤ $0$

해설

$x \pm y = a^2 \pm \frac{3}{2}ab + b^2 = a^2 \pm \frac{3}{2}ab + \frac{9}{16}b^2 + \frac{7}{16}b^2$

$= \left(a \pm \frac{3}{2}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2 \geq 0$

$\therefore\ x \pm y \geq 0$

$\sqrt{(x+y)^2} - \sqrt{(x-y)^2} = |x+y| - |x-y|$

$= (x+y) - (x-y) = 2y$

$= 2\left(\frac{3}{2}ab\right) = 3ab$

해설

(산술평균)≥ (기하평균) 으로부터

$x = a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab| \geq \frac{3}{2}|ab| = |y|$

$\therefore\ x \pm y \geq 0$

$\sqrt{(x+y)^2} - \sqrt{(x-y)^2}$

$= |x+y| - |x-y|$

$= (x+y) - (x-y) = 2y$

$= 2\left(\frac{3}{2}ab\right) = 3ab$

**14.** $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$일 때 $x^3 - 3x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$의

양변을 세제곱하면

$x^3 = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}x$

$= 4 + 3^3\sqrt{4-3}x = 4+3x$

$\therefore\ x^3 - 3x = 4$

**15.** $x = \sqrt{4 - \sqrt{12}}$ 일 때, $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 8$ 의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{4 - \sqrt{12}} \\ &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$x = \sqrt{3} - 1$, $x + 1 = \sqrt{3}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2x - 2 = 0$

준식을 $x^2 + 2x - 2$ 로 나누면

(준식)$=(x^2 + 2x - 2)(x^2 + 2x + 3) - 2$

$\therefore$ 준식의 값은 $-2$ ($\because$ $x^2 + 2x - 2 = 0$)

**16.** $\sqrt[3]{20+a\sqrt{2}}=b+c\sqrt{2}$를 만족시키는 양의 정수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 13　　② 15　　③ 17　　④ 19　　⑤ 21

해설

양변을 세제곱하면

$20+a\sqrt{2}=(b+c\sqrt{2})^3$

$=b^3+3b^2c\sqrt{2}+3bc^2\cdot\ 2+c^3\cdot\ 2\sqrt{2}$

$(3b^2c+2c^3-a)\sqrt{2}+b^3+6bc^2-20=0$

$\therefore\ 3b^2c+2c^3-a=0$ 에서 $c(3b^2+2c^2)=a\ \ \cdots$ ㉠

$b^3+6bc^2-20=0$ 에서 $b(b^2+6c^2)=20\cdots$ ㉡

$b,\ c$는 양의 정수이므로

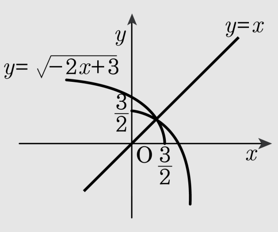
$b^2+6c^2=10,\ b=2,\ c=1$

㉠에서 $a=14\quad\therefore\ a+b+c=17$

**17.** 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ , $x = \sqrt{-2y+3}$의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① $-6$ ② $-4$ ③ $-2$ ④ $0$ ⑤ $2$

해설




함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 $x$와 $y$를 서로 바꾸면
$x = \sqrt{-2y+3}$이므로 두 함수는 서로 역함수의
관계에 있다.
따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$,
$x = \sqrt{-2y+3}$의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.
즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$의
그래프는 아래 그림과 같으므로
두 함수의 그래프의 교점은
함수 $y = \sqrt{-2x+3}$의 그래프와
직선 $y = x$의 교점과 같다.
두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$의 을
제곱하면, $-2x+3 = x^2,\ x^2+2x-3 = 0$
$(x-1)(x+3) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $0 \le x \le \frac{3}{2}$ 이므로 $x = 1,\ y = 1$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로
$a = 1,\ b = 1$
$\therefore\ a+b = 2$