1. 모든 실수 x 에 대하여 정의된 함수 $f(x) = [x] + [-x]$ 의 치역은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $\{-1,\ 0\}$ ② $\{-1,\ 1\}$ ③ $\{0,\ 1\}$

④ $\{-1,\ 0,\ 1\}$ ⑤ $\{0\}$

해설

정수 n 에 대하여

(i) $x = n$ 이면

$f(x) = [x] + [-x] = n + (-n) = 0$

(ii) $n < x < n+1$ 이면

$-n-1 < -x < -n$ 이므로 $[-x] = -n-1$

$\therefore\ f(x) = [x] + [-x] = n + (-n-1) = -1$

(i), (ii) 에서 구하는 치역은 $\{-1,\ 0\}$ 이다.

2. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4) + 3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$)

① $2f(6)$　② $2f(7)$　③ $f(7)$　④ $f(8)$　⑤ $f(9)$

해설

주어진 관계식 $f(n+2) = (n+1)+f(n)$ 을 이용하여 $f(4)+f(5) = f(6)$ 이므로

$$\begin{aligned}2f(4) + 3f(5) &= f(4) + f(5) + f(4) + f(5) + f(5)\\ &= f(6) + f(6) + f(5)\end{aligned}$$

또 $f(5) + f(6) = f(7), f(6) + f(7) = f(8)$ 이므로

$2f(4) + 3f(5) = f(6) + f(7) = f(8)$ 이다.

3. $f(x)=x^2-x$ 로 나타내어지는 함수 $f\ :\ A\ \rightarrow\ A$ 는 $A=\{x\mid x\geq a\}$ 이면 일대일대응이다. a 의 값을 구하면 ?

① 4　　② 2　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ 0

해설

$f\ :\ A\ \rightarrow\ A$ 가 일대일함수이므로

그림에서 $a\geq\frac{1}{2}$ 이고 또한 일대일대응이므로

$A=\{x\mid x\geq a\}$ 에서 $f(a)=a$ 이어야 한다.

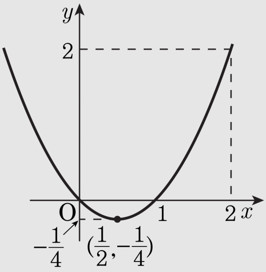
$f(x)=x^2-x$ 에서 $f(a)=a$ 이므로

$a^2-a=a\rightarrow a^2-2a=0$

$\therefore\ a=0,\ 2$

그런데, $a\geq\frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore\ a=2$



4. 함수 $f(x)=2x+1$에 대하여 $f\circ f=f^2$, $f\circ f\circ f=f^3$, $\cdots$, $f\circ f\circ\cdots\circ f=f^n$ 이라 할 때, $f^{10}(1)$의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2047 ⑤ 2048

해설

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$$
$$(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ(f\circ f))(x)=f((f\circ f)(x))=f(4x+3)=2(4x+3)+1=8x+7$$
$$\vdots$$
$$\therefore f^{10}(x)=2^{10}x+(2^{10}-1)=1024x+1023$$
$$\therefore f^{10}(1)=1024\times 1+1023=2047$$

5. 함수 $y = f(x)$의 역함수를 $y = g(x)$라고 할 때, 다음 중 함수 $f(3x-2)$의 역함수는?

① $\frac{1}{3}\{g(x)+2\}$ ② $\frac{1}{3}\{g(x)-2\}$ ③ $3g(x)-2$
④ $3g(x)+2$ ⑤ $\frac{1}{2}\{g(x)-3\}$

해설

$y = f(3x-2)$의 역함수를 구하기 위하여 x, y를 바꾸면

$x = f(3y-2)$

$\therefore 3y-2 = f^{-1}(x) = g(x)$

$\therefore y = \frac{1}{3}\{g(x)+2\}$

6. 함수 $f(x)=x|x|+k$ (k 는 상수)의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라고 할 때, $f^{-1}(4)=-1$ 이다. 이때, $\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)(4)$ 의 값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{6}$ ⑤ $-\sqrt{7}$

해설

$f^{-1}(4)=-1$ 에서 $f(-1)=4$

$f(-1)=-1+k=4$ 에서 $k=5$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2+5 & (x\geq 0) \\ -x^2+5 & (x<0) \end{cases}$$

$\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)(4)=f^{-1}(f^{-1}(4))=f^{-1}(-1)=a$ 로 놓으면 $f(a)=-1$

이 때, $f(a)<0$ 이므로 $a<0$

따라서, $f(a)=-a^2+5=-1$ 이므로

$a=-\sqrt{6}$ ($\because a<0$)

$\therefore \left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)(4)=-\sqrt{6}$

7. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $g(x) = f(x-2)$ 라할 때, $g^{-1}(9)$ 의 값은? (단, $g^{-1}(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$g(x) = f(x-2)$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x-2 & (x < 2) \end{cases}$$

$g^{-1}(9) = k$ 라 하면 $g(k) = 9$

$k \geq 2$ 일 때, $(k-2)^2 = 9$ 에서 $k = 5$

$k < 2$ 일 때, $k-2 = 9$ 를 만족하는 k 가 없다.

$\therefore\ g^{-1}(9) = 5$

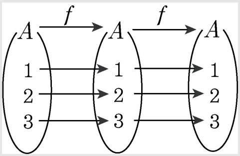
8. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 집합 A 에서 A 로의 함수 중 $f=f^{-1}$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

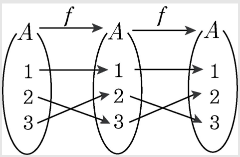
▷ 정답 : 4 개

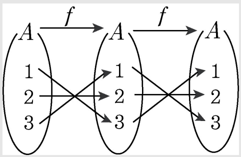
해설

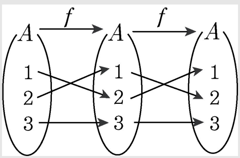
i) $f(x)=x$ 인 경우 1 개



ii) 1 개의 원소는 자기 자신에 대응되고, 나머지 2 개의 원소는 서로 엇갈려 대응되면 된다.
자기 자신에 대응되는 원소가 1, 2, 3 인 3 가지 경우가 있다.







i), ii) 에서 구하는 함수 f 의 개수는 $1+3=4$(개)

9. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 우함수, $g(x)$ 는 기함수이고, $f(4)=1,\ g(1)=-3$ 일 때, $f(-4)+g(-1)$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x)$ 는 우함수이므로 $f(-4)=f(4)=1$ $g(x)$ 는 기함수이므로
$g(-1)=-g(1)=3$
$\therefore f(-4)+g(-1)=1+3=4$

10. a, b, c가 실수일 때, $a+b=4ab$, $b+c=6bc$, $c+a=8ca$이다. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값을 구한 것은?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ 9 ④ 18 ⑤ 1

해설

준식을 변형하면 $\frac{a+b}{ab}=4\cdots①$

$\frac{b+c}{bc}=6\cdots②$

$\frac{c+a}{ca}=8\cdots③$에서

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=4\cdots①'$

$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{b+c}{bc}=6\cdots②'$

$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{a+c}{ca}=8\cdots③'$

①′ + ②′ + ③′ 하면

$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=18$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=9$

11. 서울시의 전기 요금은 100kWh 이내로 사용한 경우는 6000 원이고, 100kWh 이상은 10kWh 증가할 때마다 1000 원씩 요금이 추가된다고 한다. 사용한 전기의 양을 AkWh , 전기 요금을 B 원이라고 할 때, A 와 B 의 관계식은? (단, $A \geq 100$ 이고, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다.)

① $B = 5000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$

② $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$

③ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-101}{10}\right]$

④ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{11}\right]$

⑤ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-101}{11}\right]$

해설

100kWh $\leq A <$ 110kWh 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 0$

110kWh $\leq A <$ 120kWh 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 1$

120kWh $\leq A <$ 130kWh 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 2$

$\vdots$

$\therefore\ B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$

12. a, b가 양수일 때, $2 \le x \le 3$을 만족하는 임의의 실수 x에 대하여 $ax + 2 \le \dfrac{2x-1}{x-1} \le bx + 2$가 성립할 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

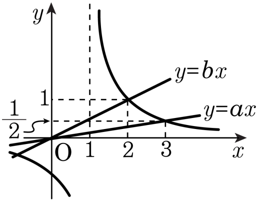
해설

$\dfrac{2x-1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ $(2 \le x \le 3)$이므로

$ax + 2 \le 2 + \dfrac{1}{x-1} \le bx + 2$

$ax \le \dfrac{1}{x-1} \le bx$

위의 그래프에 의하여 $a \le \dfrac{1}{6}$, $b \ge \dfrac{1}{2}$



13. $x=a^2+b^2,\ y=\frac{3}{2}ab$라 할 때, $\sqrt{(x+y)^2}-\sqrt{(x-y)^2}$을 간단히 하면?

① $-2(a^2+b^2)$ ② $-3ab$ ③ $2(a^2+b^2)$

④ $3ab$ ⑤ 0

해설

$x\pm y=a^2\pm\frac{3}{2}ab+b^2=a^2\pm\frac{3}{2}ab+\frac{9}{16}b^2+\frac{7}{16}b^2$

$=\left(a\pm\frac{3}{2}b\right)^2+\frac{7}{16}b^2\geq 0$

$\therefore\ x\pm y\geq 0$

$\sqrt{(x+y)^2}-\sqrt{(x-y)^2}=|x+y|-|x-y|$

$=(x+y)-(x-y)=2y$

$=2\left(\frac{3}{2}ab\right)=3ab$

해설

(산술평균)$\geq$ (기하평균) 으로부터

$x=a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2|ab|\geq\frac{3}{2}|ab|=|y|$

$\therefore\ x\pm y\geq 0$

$\sqrt{(x+y)^2}-\sqrt{(x-y)^2}$

$=|x+y|-|x-y|$

$=(x+y)-(x-y)=2y$

$=2\left(\frac{3}{2}ab\right)=3ab$

14. $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$일 때 $x^3 - 3x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$의

양변을 세제곱하면

$x^3 = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}x$

$\quad = 4+3^3\sqrt{4-3}x = 4+3x$

$\therefore\ x^3-3x=4$

15. $x = \sqrt{4-\sqrt{12}}$ 일 때, $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 8$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{4-\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

$x = \sqrt{3}-1$, $x+1 = \sqrt{3}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2x - 2 = 0$

준식을 $x^2 + 2x - 2$ 로 나누면

(준식)$=(x^2+2x-2)(x^2+2x+3)-2$

$\therefore$ 준식의 값은 -2 ($\because$ $x^2+2x-2=0$)

16. $\sqrt[3]{20+a\sqrt{2}}=b+c\sqrt{2}$를 만족시키는 양의 정수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

양변을 세제곱하면

$20+a\sqrt{2}=(b+c\sqrt{2})^3$

$=b^3+3b^2c\sqrt{2}+3bc^2\cdot 2+c^3\cdot 2\sqrt{2}$

$(3b^2c+2c^3-a)\sqrt{2}+b^3+6bc^2-20=0$

$\therefore\ 3b^2c+2c^3-a=0$ 에서 $c(3b^2+2c^2)=a\ \cdots$ ㉠

$b^3+6bc^2-20=0$ 에서 $b(b^2+6c^2)=20\cdots$ ㉡

b, c는 양의 정수이므로

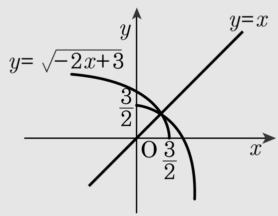
$b^2+6c^2=10$, $b=2$, $c=1$

㉠에서 $a=14$ $\therefore\ a+b+c=17$

17. 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설



함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x = \sqrt{-2y+3}$이므로 두 함수는 서로 역함수의

관계에 있다.

따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$의 그래프는

직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$의 그래프는 아래 그림과 같으므로

두 함수의 그래프의 교점은

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$의 그래프와

직선 $y = x$의 교점과 같다.

두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$의 을

제곱하면, $-2x+3 = x^2$, $x^2+2x-3 = 0$

$(x-1)(x+3) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = -3$

그런데 $0 \le x \le \frac{3}{2}$이므로 $x = 1,\ y = 1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로

$a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a+b = 2$