1. 함수 f 가 다음 세 조건을 만족한다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$
(나) $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = f(x+2)$
(다) $0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x) = 1 - \lvert x - 1 \rvert$

이 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 의 교점의 개수가 7 이기 위한 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4}$ ② $0 < a < 2$ ③ $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3} < a < 3$

해설

(다) 의 $f(x) = 1 - \lvert x - 1 \rvert$ 에서
$0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x) = 1 + x - 1 = x$
$1 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x) = 1 - x + 1 = -x + 2$
또, (나) 에서 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = f(x+2)$ 이고, (가) 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

(i) 직선 $y = ax$ 가 점 $(3,\ 1)$ 을 지날 때, $1 = 3a$ 에서 $a = \frac{1}{3}$
이 때, 이 직선과 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 5 이다.

(ii) 직선 $y = ax$ 가 점 $(5,\ 1)$ 을 지날 때, $1 = 5a$ 에서 $a = \frac{1}{5}$
이 때, 이 직선과 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 9 이다.
따라서, 직선 $y = ax$ 와 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 7 이기 위한 a 의 값의 범위는
$\frac{1}{5} < a < \frac{1}{3}$

2. 두 함수 $f(x) = |x^2 - 2x - 3| - 1$과 $g(x) = 2x - 1$에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$f(x) = g(x)$에서 $|x^2 - 2x - 3| - 1 = 2x - 1$

$|x^2 - 2x - 3| = 2x$

방정식 $|x^2 - 2x - 3| = 2x$의 실근의 개수는 함수 $y = |x^2 - 2x - 3|$의 그래프와 직선 $y = 2x$의 교점의 개수와 같다.

$y = |x^2 - 2x - 3| = |(x + 1)(x - 3)| = |(x - 1)^2 - 4|$

따라서 다음 그림에서 교점이 2개이므로 구하는 실근의 개수는 2개이다.

3. 이차함수 $y = -2x^2 - 4(k-1)x + 3k$ 의 최댓값을 K 라 할 때, K 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{15}{8}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 - 4(k-1)x + 3k \\ &= -2\left\{x^2 + 2(k-1)x + (k-1)^2\right\} + 2(k-1)^2 + 3k \\ &= -2\left\{x + (k-1)\right\}^2 + 2(k-1)^2 + 3k \\ \therefore K &= 2(k-1)^2 + 3k \\ &= 2k^2 - k + 2 \\ &= 2\left(k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{16}\right) + \frac{15}{8} \\ &= 2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} \end{aligned}$$

따라서 K 의 최솟값은 $\frac{15}{8}$ 이다.

4. $x+3y=1,\ x\geq 0,\ y\geq -2$ 일 때 x^2+y^2 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+\dfrac{1}{m}$ 의 값은?

① 53 ② 58 ③ 63 ④ 68 ⑤ 72

해설

$x+3y=1$ 로부터 $x=1-3y$ ····· ㉠

그런데 $x\geq 0$ 이므로

$x=1-3y\geq 0 \therefore\ y\leq \dfrac{1}{3}$ ····· ㉡

또 $y\geq -2$ ····· ㉢

㉡, ㉢에서 $-2\leq y\leq \dfrac{1}{3}$

$x^2+y^2=k$ 라 하고 이 식에 ㉠을 대입하면

$(1-3y)^2+y^2=1-6y+9y^2+y^2 \ \therefore\ 10\left(y^2-\dfrac{6}{10}y\right)+1=k$

$=10y^2-6y+1=k$

$\rightarrow\ 10\left(y-\dfrac{3}{10}\right)^2-\dfrac{9}{10}+1=k$

$\rightarrow\ 10\left(y-\dfrac{3}{10}\right)^2+\dfrac{1}{10}=k$

$\begin{cases}\therefore\ y=\dfrac{3}{10}\text{ 일 때 }k=\dfrac{1}{10}\ :\ \text{최솟값 } m\\ y=-2\text{ 일 때 }k=53\ :\ \text{최댓값 } M\\ y=\dfrac{1}{3}\text{ 일 때 }k=\dfrac{1}{9}\end{cases}$

$\therefore\ M+\dfrac{1}{m}=53+10=63$

5. O(0, 0), A(7, 1), B(5, 5) 라 할 때, $\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 최소로 하는 점 P 의 좌표를 (α, β) , 그 때의 최솟값을 r 라 할 때, $\alpha + \beta + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 46

해설

$\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$
$= x^2 + y^2 + (x-7)^2 + (y-1)^2 + (x-5)^2 + (y-5)^2$
$= 3(x-4)^2 + 3(y-2)^2 + 40$
$(x-4)^2 \geq 0,\ (y-2)^2 \geq 0$ 이므로
$x = 4,\ y = 2$ 에서 최솟값 $r = 40$ 을 갖는다.
$\therefore\ \alpha + \beta + r = 46$

6. 어느 공장에서 생산하는 제품은 50 개를 생산할 때까지는 개당 5000 원의 비용이 들어가고 51 개 부터는 생산량이 1 개씩 증가할 때마다 개당 10 원씩 추가로 감소한다. 예컨대 51 개, 52 개의 제품을 생산할 때의 생산 비용이 각각 개당 4990 원, 4980 원이다. 이 때 총 생산 비용이 최대가 될 때의 개당 생산 비용을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 2750 원

해설

생산량을 x 개라 하면

(1) $x \le 50$ 일 때

(총 생산 비용) $= 5000 \times x = 5000x$

따라서 $x = 50$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 250000 원이다.

(2) $x > 50$ 일 때

(개당 생산 비용) $= 5000 - 10(x - 50) - 10x + 5500$

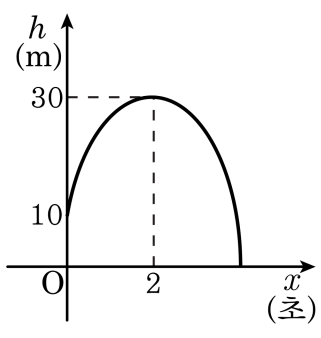
$$\begin{aligned}(\text{총 생산 비용}) &= (5500 - 10x)x \\ &= -10x^2 + 5500x \\ &= -10(x - 275)^2 + 756250\end{aligned}$$

따라서 $x = 275$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 756250 원이다.

(1), (2)에 의하면 생산량 275 개일 때, 총 생산 비용이 최대이다.

이 때, 개당 생산 비용은 2750 원이다.

7. 다음 그림은 지면으로부터 10m 높이에서 던져 올린 물체의 운동을 나타내는 그래프이다. 던진 후 몇 초 만에 다시 지면으로 떨어지는가?



① 4 초 ② $(\sqrt{6}-2)$ 초 ③ $(2+\sqrt{6})$ 초

④ 5 초 ⑤ 6 초

해설

$y=a(x-2)^2+30$ 이고, $(0,\ 10)$ 을 지난다.

$10=4a+30$

$\therefore a=-5$

$\therefore y=-5(x-2)^2+30=-5x^2+20x+10$

$x^2-4x-2=0$

$\therefore x=2+\sqrt{6}\ \ (\because x>0)$

8. 정수 계수를 갖는 임의의 삼차식 $f(x)$에 대하여 α는 $f(x)+1=0$의 한 정수근이고 β는 $f(x)-1=0$의 한 정수근일 때, $\beta-\alpha$의 값이 될 수 없는 것은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(\alpha)+1=0,\ f(\beta)-1=0$이므로 $f(\beta)-f(\alpha)=2$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d$는 정수$)$로 놓으면

$f(\beta)-f(\alpha)=a(\beta^3-\alpha^3)+b(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)=2$

$(\beta-\alpha)\{a(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+b(\beta+\alpha)+c\}=2$

따라서 $\beta-\alpha$는 2의 약수이어야 한다.

$\therefore\ \beta-\alpha=\pm1$ 또는 ±2

9. 삼차방정식 $x^3 - mx - 2 = 0$의 근이 모두 정수일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m = 3$

해설

세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \geq \beta \geq \gamma)$ 라 하면

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ ……①

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -m$ ……②

$\alpha\beta\gamma = 2$ ……③

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 는 정수이므로 ③에서

$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (2, -1, -1)\ ,\ (1, -1, -2),\ (2,\ 1,\ 1)$

이 중에서 ①에 맞는 것은

$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (2,\ -1,\ -1)$

따라서 ②로부터 $-2 + 1 - 2 = -m$

$\therefore\ m = 3$

10. 실계수 사차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 의 네 개의 근 중에서 두 근 α,β 가 $\alpha+\beta=2+3i,\ \alpha\beta=5i$ 일 때, $\dfrac{e-b}{a}$ 의 값은?

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

해설

$\alpha+\beta=2+3i,\ \alpha\beta=5i$ 이므로
$\alpha,\ \beta$ 는 모두 허수이다.
또한 방정식의 계수가 실수이므로
나머지 두 근은 $\overline{\alpha},\overline{\beta}$ 이다.
따라서 $\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ 가 네 근이 되므로
주어진 방정식은
$a(x-\alpha)(a-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})=0$ 이 된다.
계수 비교를 통해
$\dfrac{e}{a}$ 는 네 근의 곱이 됨을 알 수가 있고
$-\dfrac{b}{a}$ 는 네 근의 합이 됨을 알 수 있다.

$\therefore\ \dfrac{e-b}{a}=\alpha\times\overline{\alpha}\times\beta\times\overline{\beta}+(\alpha+\overline{\alpha}+\beta+\overline{\beta})$

$=(5i)(\overline{5i})+(2+3i)+(\overline{2+3i})=29$

11. 방정식 $x^3+2x^2+px+q=0$이 한 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, 실수 p, q의 곱은?

① -2 ② 2 ③ -3 ④ 3 ⑤ 1

해설

(i) 한 허근을 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하면 $\alpha^2=a-bi$
($\because$ 계수가 실수인 방정식)
$\therefore (a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=a-bi$
$a^2-b^2=a\cdots\cdots\cdots$①
$2ab=-b\cdots\cdots\cdots$②
①, ② 에서 $b\neq 0$ 이므로

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 라 하면 $\alpha^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
(ii) α, α^2을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+x+1=0$
한 실근을 β라고 할 때, 세 근의 합은

$$\beta+(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-2\ \therefore\beta=-1$$

$\therefore x^3+2x^2+px+q$
$=(x^2+x+1)(x+1)$
$=x^3+2x^2+2x+1$
$\therefore p=2,\ q=1$
$\therefore pq=2$

12. 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 서로 다른 두 근을 α,β라 할 때, $(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+\cdots+(\alpha^{100}+\beta^{100})$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2+x+1=0$의
서로 다른 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0,\ \beta^2+\beta+1=0$
또, $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$
n이 양의 정수일 때,
$\alpha^{n+2}+\alpha^{n+1}+\alpha^n$
$=\alpha^n(\alpha^2+\alpha+1)=0$
$\beta^{n+2}+\beta^{n+1}+\beta^n$
$=\beta^n(\beta^2+\beta+1)=0$이므로
$(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+\cdots+(\alpha^{100}+\beta^{100})$
$=\alpha+\{(\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)+\cdots+(\alpha^{98}+\alpha^{99}+\alpha^{100})\}$
$+\beta+\{(\beta^2+\beta^3+\beta^4)+\cdots+(\beta^{98}+\beta^{99}+\beta^{100})\}$
$=\alpha+\beta=-1$

13. 주말 연속극을 시작하기 전에 상품 광고를 하려고 한다. 광고에는 광고 시간이 20초인 것과 25초인 것 두 종류가 있고, 광고 내용이 바뀔 때마다 1초 동안의 간격을 둔다. 정확하게 4분 30초 동안에 11개의 상품을 광고하고 싶다면 광고 시간이 20초인 상품을 몇 개 광고해야 하는지 구하면?

① 1개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 9개

해설

20초 광고의 개수를 x,
25초 광고의 개수를 y라 할 때
11개의 광고들 사이의 간격은 $10 \times 1(\text{초}) = 10(\text{초})$
총 4분 30초는 $60 \times 4 + 30 = 270(\text{초})$이다.
$\therefore$ 광고에 사용되는 시간은 $270 - 10 = 260(\text{초})$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 20x + 25y = 260 \end{cases}$$

두 식을 연립하여 풀면, $x = 3,\ y = 8$
따라서 20초 광고는 3개이다.

14. 사차방정식 $x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 45x + a + 20 = 0$과 이차방정식 $x^2 - 8x + 8 = 0$이 공통근을 가질 때, a의 값은?

① $6\sqrt{2}$ ② $\pm 6\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{6}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$ ⑤ $\pm 5\sqrt{3}$

해설

두 방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^4 - 10\alpha^3 + 28\alpha^2 - 45\alpha + a + 20 = 0 \cdots ①$

$\alpha^2 - 8\alpha + 8 = 0 \cdots ②$

①의 좌변을 ②의 좌변으로 나누어 정리하면,

$(\alpha^2 - 8\alpha + 8)(\alpha^2 - 2\alpha + 4) + 3\alpha + a - 12 = 0$

$\therefore\ 3\alpha + a - 12 = 0 \cdots ③$

②에서 $\alpha = 4 \pm 2\sqrt{2}$

이것을 ③에 대입하여 a를 구하면

$a = \pm 6\sqrt{2}$

15. 빗변의 길이가 6 , 내접원의 반지름의 길이가 1 인 직각삼각형의 다른 두변의 길이를 구하면?

① $4+\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}+2\sqrt{2},\ \sqrt{10}-2\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{3}+\sqrt{6},\ 2\sqrt{3}-\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{5},\ 4$

⑤ $3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}$

해설

빗변이 아닌 두 변의 길이를 $x,\ y$ 라 하면

$x^2+y^2=36\cdots$㉠

또, $(x-1)+(y-1)=6$

$\therefore\ x+y=8\cdots$㉡

㉡^{2} − ㉠에서 $2xy=28$

$\therefore\ xy=14$

따라서, $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-8t+14=0$ 의 두 근 $4+\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2}$ 이다.

16. $x^2+3x+xy+2y-128=0$을 만족시키는 모든 양의 정수 x의 합은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

(좌변) $=(x+2)y+x^2+3x-128$

$=(x+2)y+(x+2)^2-(x+2)-130$

$=(x+2)\{y+(x+2)-1\}-130$

$\therefore\ (x+2)(x+y+1)=2\times5\times13$

$3\le x+2\le x+y+1$ 이므로

$(x+2,\ x+y+1)=(5,\ 26),\ (10,\ 13)$

$\therefore\ (x,\ y)=(3,\ 22)$ 또는 $(8,\ 4)$

$\therefore$ x의 합은 $3+8=11$

17. x에 대한 이차방정식 $x^2-(2a-1)x+a+1=0$의 두 근 α,β가 모두 정수일 때, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$의 값을 구하면? (단, a는 자연수)

① $\dfrac{5}{2}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ $\dfrac{5}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{6}{5}$

해설

근이 정수이려면 판별식 $D=(2a-1)^2-4(a+1)=k^2$ (k는 정수)이어야 한다. 이 식을 정리하면 $4a^2-8a-3=k^2$, $(2a-2)^2-7=k^2$, $(2a-2)^2-k^2=7$, $(2a-2+k)(2a-2-k)=7$ a, k는 정수이므로

(i) $2a-2+k=1$, $2a-2-k=7$이서

$a=3$, $k=-3$

(ii) $2a-2+k=7$, $2a-2-k=1$이서

$a=3$, $k=3$

(iii) $2a-2+k=-1$, $2a-2-k=-7$이서 $a=-1$, $k=3$

(iv) $2a-2+k=-7$, $2a-2-k=-1$이서 $a=-1$, $k=-3$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2a-1}{a+1}=\dfrac{5}{4}$

18. $a,\ b,\ c,\ d$는 정수이고, $a < 2b,\ b < 3c,\ c < 4d,\ d < 100$을 만족시킬 때, a의 최댓값은?

① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a의 최댓값은 $b,\ c,\ d$가 각각 최대일 때이다.
d의 최댓값은 99이고,
$c < 4 \cdot 99 = 396$이므로 c의 최댓값은 395,
$b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b의 최댓값은 1184,
$a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a의 최댓값은 2367

19. $y = 2 - x$ 일 때, $-\frac{x}{6} < y \leq \frac{x}{2}$ 를 만족하는 음이 아닌 정수 x, y 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = 2$

▷ 정답: $y = 0$

해설

$y = 2 - x$ 를 $-\frac{x}{6} < y \leq \frac{x}{2}$ 에 대입하면

$-\frac{x}{6} < 2 - x \leq \frac{x}{2}$

$-\frac{x}{6} < 2 - x \cdots$ ㉠

$2 - x \leq \frac{x}{2} \cdots$ ㉡

㉠에서 $x < \frac{12}{5}$

㉡에서 $x \geq \frac{4}{3}$

$\therefore \frac{4}{3} \leq x < \frac{12}{5}$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 음이 아닌 정수 $x = 2$, $y = 0$ 이다.

20. 부등식 $a+7 \le ax+b \le 4b+2a$의 해가 $2 \le x \le 8$일 때, $a,\ b$의 값을 각각 구하면?

① $a=-2,\ b=-1$　② $a=-1,\ b=0$

③ $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{7}{3}$　④ $a=\frac{7}{3},\ b=\frac{14}{3}$

⑤ $a=2,\ b=-1$

해설

$a+7 \le ax+b \le 4b+2a$

(1) $a>0$일 때,

$a+7 \le ax+b,\ x \ge \frac{a-b+7}{a}$

$ax+b \le 4b+2a,\ x \le \frac{3b+2a}{a}$

$\frac{a-b+7}{a} \le x \le \frac{3b+2a}{a}$

$\therefore \frac{a-b+7}{a}=2,\ \frac{3b+2a}{a}=8$

$\therefore a=\frac{7}{3},\ b=\frac{14}{3}$

(2) $a<0$일 때

$\frac{3b+2a}{a} \le x \le \frac{a-b+7}{a}$

$\therefore \frac{3b+2a}{a}=2,\ \frac{a-b+7}{a}=8$

$\therefore a=1,\ b=0$

($a<0$이어야 하므로 조건을 만족하지 않는다.)

21. 연립부등식

$$\begin{cases} x+2y \geq a+2 \\ y+2z \geq 2(a+4) \\ z+2x \geq a+5 \end{cases}$$

의 해 $x,\ y,\ z$ 가 $x+y+z=9$ 를 만족할 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{cases} x+2y \geq a+2 \\ y+2z \geq 2(a+4) \\ z+2x \geq a+5 \end{cases}$$

위 부등식을 변변 더하면 $3(x+y+z) \geq 4a+15$

$x+y+z=9$ 이므로 $27 \geq 4a+15$

$\therefore\ a \leq 3$

따라서 a 의 최댓값은 3 이다.

22. 세 자연수의 합이 20 이상 25 이하이고, 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $9 : 10 : 5$ 인 세 자연수를 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 4

▷ 정답: 6

▷ 정답: 14

해설

세 자연수를 각각 $x,\ y,\ z$ 라 하면 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $9 : 10 : 5$ 이므로

$x + y = 9k$

$y + z = 10k$

$z + x = 5k$

각 변끼리 더하면 $x + y + z = 12k$

따라서 $x = 2k,\ y = 7k,\ z = 3k$

그런데 세 수의 합이 20 이상 25 이하이므로

$20 \le x + y + z \le 25$ 에서 $20 \le 12k \le 25$

$\therefore\ \dfrac{5}{3} \le k \le \dfrac{25}{12}$

k 는 자연수이므로 $k = 2$

따라서 $x = 4,\ y = 14,\ z = 6$

세 자연수는 4, 6, 14 이다.

23. 자동차 판매회사에 다니는 차세일씨는 기본 연봉 1000 만원에 연간 자동차 판매 금액의 일정 비율을 추가로 지급받기로 하였다. 한 대당 가격이 1000 만원인 자동차를 4 대, 한 대당 가격이 2000 만원인 자동차를 3대 판매할 것으로 예상되고 차세일씨가 연간 받고자 하는 급여의 총액이 1500 만원 이상이라고 할 때 연간 자동차 판매 금액의 최소 몇 % 를 추가로 지급해 달라고 요구해야 하는지 구하여라.(단, 세금은 계산하지 않는다.)

▶ 답: %

▷ 정답: 5 %

해설

판매 금액의 일정 비율을 x% 라 하면

$1000 + (1000 \times 4 + 2000 \times 3) \times \frac{x}{100} \geq 1500$

$\therefore\ x \geq 5$

따라서 차세일씨는 자동차 판매금액의 최소 5% 를 추가로 지급해 달라고 요구해야 한다.

24. 일정한 농도의 소금물 400g 에 소금을 20g 넣고, 넣어 준 소금의 양만큼 물을 증발시켜서 농도가 15 % 이상 되게 하려고 한다. 이 때 어느 정도 이상의 농도를 지닌 소금물에 소금을 추가해야 하는지 구하여라.

▶ 답 : %

▷ 정답 : 10 %

해설

현재 소금물의 농도를 x % 라 하면
농도가 x % 인 소금물 400g 에 들어있는 소금의 양은
$400 \times \frac{x}{100} = 4x(\text{g})$
소금을 더 넣어준 후의 소금의 양은
$(4x + 20)$ g 이므로
$\frac{4x + 20}{400} \times 100 \geq 15$
$\therefore x \geq 10$
따라서 소금물의 농도는 10 % 이상이어야 한다.

25. 지현이는 친구들과 놀이동산에서 관람차를 타기로 했다. 관람차 한 칸에 6 명씩 타면 8 명이 남고, 7 명씩 앉으면 마지막 칸에는 3 명 이상 5 명 이하가 타게 된다고 한다. 다음 중 관람차의 칸 수가 될 수 없는 것을 모두 골라라.

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

관람차가 x 칸으로 이루어져 있다고 하면, 사람 수는 $6x+8$ 이다.
7 명씩 탈 경우 $x-1$ 칸 까지는 7 명씩 타지만 마지막 칸에는 3 명 이상 5 명 이하가 타게 된다. 3 명만 탈 경우를 식으로 나타내면, $7(x-1)+3$ 이고, 5 명이 탈 경우를 식으로 나타내면 $7(x-1)+5$ 이다. 사람 수는 관람차에 7 명씩 타고 마지막 칸 만 3 명 이상일 경우와 5 명 이하일 경우의 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $7(x-1)+3 \le 6x+8 \le 7(x-1)+5$ 이다. 이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 7(x-1)+3 \le 6x+8 \\ 6x+8 \le 7(x-1)+5 \end{cases}$ 간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 12 \\ x \ge 10 \end{cases}$
$10 \le x \le 12$
따라서 관람차는 10 또는 11 또는 12 칸 이다.

26. 1 시간에 10ton 의 물이 유입되고 있는 댐이 있다. 이 댐에는 800ton 의 물이 있었다. 이 댐의 물을 방출하여 댐의 물이 200ton 이하가 되도록 하려고 한다. 매시간 일정한 양의 물을 방출하여 15 시간이 경과한 후, 남은 물의 양이 전체의 62.5 % 가 되었다. 같은 양의 물을 방출한다면 댐의 물이 200ton 이하가 될 때까지 최소한 얼마의 시간이 걸릴 것인지 구하여라.

▶ 답 : 시간

▷ 정답 : 15 시간

해설

15 시간 동안 줄어든 물의 양은 $800 \times (1 - 0.625) = 300$ (톤) 이므로

1 시간당 댐에서 방출되는 물의 양을 x톤이라 하면

$(x - 10) \times 15 = 300$

$x = 30$

현재 남아있는 물의 양은 500 톤이고 200 톤 이하가 되기 위해서는 300 톤 이상의 물이 추가로 줄어들어야한다.

이를 위해 필요한 시간을 y시간이라 하면

$(30 - 10) \times y \geq 300$

$\therefore y \geq 15$

따라서 댐의 물이 200 톤 이하가 되기 위해서는 최소 15 시간이 있어야 한다.

27. $n \le x < n+1$ (단, n은 정수)인 실수 x에 대하여 $< x >= n-2$, $\{x\} = n+2$로 정한다. $1 \le x < 2$, $3 \le y < 4$ 일 때, $< x+y > + \{x-y\}$가 나타낼 수 있는 정수들의 총합을 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$1 \le x < 2$, $3 \le y < 4$에서
$4 \le x+y < 6$, $-3 < x-y < -1$
그런데 $n \le x < n+1$이므로 조건에 맞게 범위를 나누어 값을 구해보면
$4 \le x+y < 5$에서 $< x+y >= 2$
$5 \le x+y < 6$에서 $< x+y >= 3$
$-3 < x-y < -2$ 에서 $\{x-y\}$은 정의되지 않는다.
$-2 \le x-y < -1$에서 $\{x-y\} = 0$
$\therefore < x+y > + \{x-y\} = 0+2+3$
$\therefore$ 정수들의 총합은 5

28. $n-\frac{1}{2} \le x < n+\frac{1}{2}$ (단, n은 정수)인 실수 x에 대하여 $\{x\}=n$으로 나타낼 때, 방정식 $\left\{x^2-x-\frac{1}{2}\right\}=3x+1$의 근을 α, β라 하자. 이때, $9\alpha\beta$의 값을 구하면?

① 13 ② −13 ③ 15 ④ −15 ⑤ 17

해설

$3x+1$은 정수이므로

$(3x+1)-\frac{1}{2} \le x^2-x-\frac{1}{2} < (3x+1)+\frac{1}{2}$

$\therefore\ 5 \le x^2-4x+4 < 6$

$\therefore\ 5 \le (x-2)^2 < 6$

이때, $3x+1$이 정수이므로 $3x$도 정수,

$3x=k$(k는 정수)라 하면 $x=\frac{k}{3}$

$\therefore\ 5 \le \left(\frac{k-6}{3}\right)^2 < 6$

$\therefore\ 45 \le (k-6)^2 < 54 \quad \therefore\ k=-1,\ 13$

$k=-1$일 때 $x=-\frac{1}{3}$,

$k=13$일 때 $x=\frac{13}{3}$

$\therefore\ 9\alpha\beta=-13$

29. 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha-1<x<\beta+1$일 때, 부등식 $cx^2-bx+a>0$의 해를 α, β를 써서 나타내면? (단, $\alpha>1$)

① $\dfrac{1}{\beta+1}<x<\dfrac{1}{\alpha-1}$　② $-\dfrac{1}{\beta+1}<x<-\dfrac{1}{\alpha-1}$

③ $\dfrac{1}{\alpha-1}<x<\dfrac{1}{\beta+1}$　④ $-\dfrac{1}{\alpha-1}<x<-\dfrac{1}{\beta+1}$

⑤ $-\dfrac{1}{\alpha-1}<x<\dfrac{1}{\beta+1}$

해설

㉠ $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha-1<x<\beta+1$ 이라면 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0(a<0)$ 에서 두 근은 $\alpha-1,\beta+1$ 이다.

두 근의 합 : $\alpha-1+\beta+1=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

두 근의 곱 : $(\alpha-1)(\beta+1)=\dfrac{c}{a}$, $\alpha-1<\beta+1$이고, $\alpha>1$ 이므로 $\dfrac{c}{a}>0$

㉡ $cx^2-bx+a>0$에서 $\dfrac{c}{a}x^2-\dfrac{b}{a}x+1<0$, $(\alpha-1)(\beta+1)x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

$\{(\alpha-1)x+1\}\{(\beta+1)x+1\}<0$

$\alpha-1<\beta+1$이므로 $-(\alpha-1)>-(\beta+1)$, $-\dfrac{1}{\alpha-1}<-\dfrac{1}{\beta+1}$

$\therefore -\dfrac{1}{\alpha-1}<x<-\dfrac{1}{\beta+1}$

30. 분수함수 $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$는 $x=a$일 때 최댓값 α를 갖고, $x=b$일 때 최솟값 β를 갖는다. 이 때, $a+b+\alpha\beta$의 값은?

① $\dfrac{3}{2}$　② 1　③ 2　④ $\dfrac{5}{2}$　⑤ $\dfrac{3}{4}$

해설

$y=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ 에서

$(y-1)x^2+(3y+3)x+4(y-1)=0$

ⅰ) $y=1$일 때, $x=0$(실수)

ⅱ) $y\neq 1$일 때, $D=9(y+1)^2-16(y-1)^2\geq 0$

$(7y-1)(y-7)\leq 0 \quad \therefore \ \dfrac{1}{7}\leq y\leq 7$

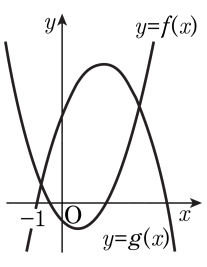
ⅰ), ⅱ) 에서

최댓값 $\alpha=7$, 이 때 $x=-2=a$

최솟값 $\beta=\dfrac{1}{7}$, 이 때 $x=2=b$

$\therefore \ a+b+\alpha\beta=1$

31. 이차항의 계수가 각각 1, -1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음의 그림과 같다. 부등식 $f(x)-g(x)\le 0$의 해가 $-1\le x\le 3$이고 $f(2)=1$ 일 때, $g(1)$의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=f(x)$의 y절편이 -1이므로 $f(x)=x^2+ax-1$로 놓을 수 있다.

$f(2)=2a+3=1$에서 $a=-1$

$\therefore f(x)=x^2-x-1$

$g(x)=-x^2+bx+c$로 놓으면 $f(x)-g(x)\le 0$의 해가 $-1\le x\le 3$이므로

$f(x)-g(x)=2x^2-(1+b)x-1-c=2(x+1)(x-3)=2x^2-4x-6$

따라서, $1+b=4$, $-1-c=-6$에서

$b=3$, $c=5$

$\therefore g(x)=-x^2+3x+5$

$\therefore g(1)=7$

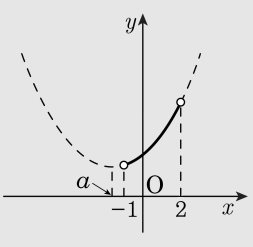
32. $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2ax + 2a + 3 > 0$ 이 항상 성립하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$ 이라 하면

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 2a + 3$



$-1 < x < 2$ 에서

부등식 $f(x) > 0$ 이 항상 성립하려면

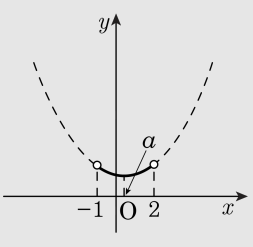
(i)$a < -1$ 일 때,

다음 그림에서 $f(-1) > 0$

$4a + 4 > 0 \quad \therefore\ a > -1$

그런데 $a < -1$ 이므로 이를 만족시키는 a 의 값은 없다.

(ii) $-1 \le a < 2$ 일 때,



다음 그림에서 $f(a) > 0$

$-a^2 + 2a + 3 > 0$ 에서

$(a+1)(a-3) < 0$

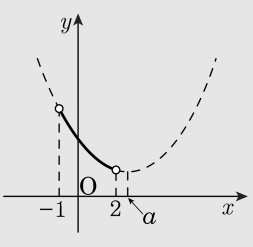
$\therefore\ -1 < a < 3$

그런데 $-1 \le a < 2$ 이므로 $-1 < a < 2$

그런데 $a = -1$ 인 경우 $f(a) = 0$ 이어도

$-1 < x < 2$ 에서는 $f(x) > 0$ 이므로 성립한다.

따라서 $-1 \le a < 2$



(iii) $a \ge 2$ 일 때, 다음 그림에서

$f(2) > 0\ -2a + 7 > 0 \quad \therefore\ a < \frac{7}{2}$

그런데 $a \ge 2$ 이므로 $2 \le a < \frac{7}{2}$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는

$-1 \le a < \frac{7}{2}$

따라서, 정수 a 는 $-1, 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 으로 5개다.

33. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b<0 \\ x^3+x\geq 0 \end{cases}$ 의 해가

$0\leq x<2$이고 실수 $a,\ b$가 $|a|+|b|=3$을 만족할 때, $a,\ b$의 값에 대하여 $2a+b$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^3+x=x(x^2+1)\geq 0$ 에서
$x^2+1>0$ 이므로 $x\geq 0$

따라서 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b<0\cdots① \\ x\geq 0\cdots② \end{cases}$ 의 해가

$0\leq x<2$ 이기 위해서는 부등식 ①의 해가
$a<x<2(a<0)$ 이어야 한다.
따라서, $x^2+ax+b=(x-a)(x-2)=x^2-(a+2)x+2a$

$\therefore \begin{cases} a=-a-2 \\ b=2a \end{cases} \cdots③$

$|a|+|b|=3$ 이므로,
$|-a-2|+|2a|=3$
i) $a<-2$ 일 때,
$-a-2-2a=3$
$\therefore a=-\frac{5}{3}$
그러나 $a<-2$ 이므로 부적당
ii) $-2\leq a<0$ 일 때,
$a+2-2a=3$
$\therefore a=-1$
③에서 $a=-1, b=-2$
$\therefore 2a+b=-4$

34. 한 상자에 빨강, 파랑, 흰색의 구슬이 들어 있다. 파란 구슬의 개수는 흰 구슬의 개수의 $\frac{1}{2}$ 보다 크거나 같고, 빨간 구슬의 개수의 $\frac{1}{3}$ 보다 작거나 같다. 한편, 흰 구슬과 파란 구슬의 개수의 합은 55 보다 크거나 같다. 이때, 빨간 구슬의 개수의 최솟값을 구하면?

① 57 ② 58 ③ 59 ④ 60 ⑤ 61

해설

빨간 구슬의 개수를 a 개, 파란 구슬의 개수를 b 개, 흰색 구슬의 개수를 c 개라 하면,

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a \geq b \geq \frac{1}{2}c \cdots ㉠ \\ b + c \geq 55 \cdots ㉡ \quad (\text{단, } a,\ b,\ c\text{는 자연수}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & b + c \geq 55 \\ -) & b - \frac{1}{2}c \geq 0 \\ \hline & \frac{3}{2}c \geq 55 \end{array}$$

$c \geq \frac{2}{3} \times 55 = 36.6 \cdots \quad \therefore c \geq 37$

㉠ 에서 $b \geq \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \times 37 = 18.5 \quad \therefore\ b \geq 19$

$\frac{1}{3}a \geq 19 \quad \therefore\ a \geq 57$

35. 이차방정식 $x^2-(a+2)bx+(a+1)b=0$ $(a>0,\ b>0)$이 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 두 개의 근이 모두 1보다 크기 위해서 필요한 조건은?

① $b>1$ ② $b<1$ ③ $b>2$ ④ $b<2$ ⑤ $b>3$

해설

실근을 가질 조건은 $(a+2)^2b^2-4(a+1)b>0$

$\therefore\ b>\dfrac{4(a+1)}{(a+2)^2}\cdots$ (i)

여기서, 두 근이 모두 1 이하라 하면

(두 근의 합)$=(a+2)b\le 2\cdots$ (ii)

(i), (ii)에서 $\dfrac{4(a+1)}{a+2}<2$

$\therefore\ a<0$

이것은 문제의 조건에 모순된다.

∴ 적어도 한 개의 근은 1보다 크다.

그러므로 $f(1)>0$이면 두 근이 모두 1보다 크게 된다.

$\therefore f(1)=1-(a+2)b+(a+1)b>0\quad\therefore\ b<1$