

1. 다음과 같은 규칙으로 수를 나열하였을 때, 8^8 과 크기가 같은 수는 몇 번 나오는지 구하여라.

1	1	1	1	...
2	4	8	16	...
3	9	27	81	...
4	16	64	256	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

▶ 답 : 번

▷ 정답 : 8 번

해설

$8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$ 으로 나타낼 수 있다.

자연수 m, n 에 대하여 $(2^m)^n = 2^{mn} = 2^{24}$ 일 때, $mn = 24$ 가 되는 순서쌍 (m, n) 은 24 의 약수의 개수만큼 나타난다.

따라서 $24 = 2^3 \times 3$ 에서 24 의 약수의 개수는 $(3+1)(1+1) = 8$ (개) 이므로 8^8 과 크기가 같은 수는 모두 8 번 나온다.

2. 분수 $\frac{21}{2^3 \times 5 \times 7 \times a}$ 를 소수로 나타내면 무한소수가 된다. 이때 가장 작은 a 는?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$\frac{3}{2^3 \times 5 \times a}$ 가 무한소수가 되기 위해서는 a 가 2 나 5 가 아닌 수를 소인수로 가져야 한다. a 가 3 이 될 경우에는 약분이 된다.

3. $\frac{x}{2 \times 3 \times 5^2}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 이 분수를 기약분수로 나타내면 $\frac{4}{y}$ 이다. 이때, $y - x$ 의 값은? (단, x 는 $20 < x < 30$ 인 자연수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\frac{x}{150} = \frac{x}{2 \times 3 \times 5^2} = \frac{4}{y} \text{에서 유한소수이므로}$$

x 는 3의 배수이고, 기약분수이므로 8의 배수이다.

3과 8의 공배수인 24의 배수 중에서 20과 30사이의 수는 24이고,

이때, $y = 25$ 이므로 $y - x = 1$ 이다.

4. 분수 $\frac{x}{84}$ 를 소수로 고치면 유한소수이고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{3}{y}$ 이 된다고 한다. 이때, $x+y$ 값을 구하여라. (단, $y \neq 1$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 67

▷ 정답 : 128

해설

$$\frac{x}{84} = \frac{x}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{y} \Rightarrow x \text{ 는 } 3 \times 7 \times 3 \text{ 의 배수}$$

$x = 63$ 일 때 $y = 4$, $x = 126$ 일 때, $y = 2$ 이다.

$$\therefore 63 + 4 = 67, 126 + 2 = 128$$

5. $0.\overline{abcd\dot{e}} = \frac{29947}{99000}$ 일 때, 한 자리 자연수 a, b, c, d, e 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 3$

▷ 정답 : $b = 0$

▷ 정답 : $c = 2$

▷ 정답 : $d = 4$

▷ 정답 : $e = 9$

해설

$$\frac{29947}{99000} = 0.3024\dot{9} \text{ 이므로}$$

$$a = 3, b = 0, c = 2, d = 4, e = 9$$

6. 부등식 $2.\dot{9} \leq x < \frac{74}{15}$ 를 만족시키는 정수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 4

해설

$$2.\dot{9} \leq x < \frac{74}{15} = 4.9\dot{3}$$

7. 다음을 계산하여라.

$$0.\dot{1} + \frac{0.\dot{2}}{2} + \frac{0.\dot{3}}{3} + \frac{0.\dot{4}}{4} + \cdots + \frac{0.\dot{9}}{9}$$

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} + \cdots + \frac{9}{9} \times \frac{1}{9} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{9} \times 9 = 1 \end{aligned}$$

8. $a < b < c < 9$ 인 자연수 a, b, c 에 대하여 $0.\dot{a} \times k = 0.0\dot{b}$, $0.0\dot{b} \times k = 0.00\dot{c}$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{5}$

해설

$k = \frac{b}{90} \div \frac{a}{9} = \frac{b}{10a}$, $k = \frac{c}{900} \div \frac{b}{90} = \frac{c}{10b}$ 이므로 $k = \frac{b}{10a} = \frac{c}{10b}$ 이다.

$$\therefore b^2 = ac$$

$0 < a < b < c < 9$ 인 정수이므로, $a = 1, b = 2, c = 4$

$$\therefore 0.\dot{a} = \frac{1}{9}, 0.0\dot{b} = \frac{2}{90}, 0.00\dot{c} = \frac{4}{900}$$

따라서 $k = \frac{b}{10a} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ 이다.

9. $9^{x+2} = 3^{2x} \times 3^y$ 에서 y 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$9^{x+2} = (3^2)^{x+2} = 3^{2x+4} = 3^{2x+y}$$

$$2x + 4 = 2x + y$$

$$\therefore y = 4$$

10. $81^4 \div 27^n = 9^2$ 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(3^4)^4 \div 3^{3n} = 3^4 \text{ 이므로 } 16 - 3n = 4$$

$\therefore n = 4$ 이다.

11. $\left\{\left(-\frac{3}{16}a\right)^3 b^3\right\}^4 = \frac{3^w}{2^v} a^x \times b^y$ 일 때, v, w, x, y 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $v = 48$

▷ 정답 : $w = 12$

▷ 정답 : $x = 12$

▷ 정답 : $y = 12$

해설

$$\begin{aligned}\left\{\left(-\frac{3}{16}a\right)^3 b^3\right\}^4 &= \left(-\frac{3^3}{2^{12}}a^3 \times b^3\right)^4 \\ &= \frac{3^{12}}{2^{48}}a^{12}b^{12}\end{aligned}$$

12. 자연수 n 을 7 로 나눈 나머지를 $f(n)$ 이라 정의할 때, $f(8^{12} \times 25^{18})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$8^{12} \times 25^{18} = (2^3)^{12} \times (5^2)^{18} = 2^{36} \times 5^{36} = 10^{36} \text{ 이므로 } f(8^{12} \times 25^{18}) = f(10^{36})$$

10 을 7 로 나눈 나머지는 3 이므로 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 $3^{36} = (3^2)^{18} = 9^{18}$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

또, 9 를 7 로 나눈 나머지는 2 이므로 9^{18} 을 7 로 나눈 나머지는 $2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

또, 8 을 7 로 나눈 나머지는 1 이므로 8^6 을 7 로 나눈 나머지는 1^6 을 7 로 나눈 나머지와 같다.

따라서 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 1,

$$\text{즉 } f(10^{36}) = 1$$

13. $a = 8^2$, $b = 9^4$ 이라 할 때, $(a^{-1}b^2)^3 \div \left\{ \left(\frac{1}{ab} \right)^3 \right\}^2 \times a^4b^{-5} = 2^n \times 3^m$ 이 성립한다. 이때, $m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned} & (a^{-1}b^2)^3 \div \left\{ \left(\frac{1}{ab} \right)^3 \right\}^2 \times a^4b^{-5} \\ &= 2^n \times 3^m \\ &= a^{-3}b^6 \times a^6b^6 \times a^4b^{-5} \\ &= \frac{b^6}{a^3} \times a^6b^6 \times \frac{a^4}{b^5} = (ab)^7 \end{aligned}$$

따라서 $a = 8^2 = (2^3)^2 = 2^6$, $b = 9^4 = (3^2)^4 = 3^8$ 을 주어진 식에 대입하면

$$(ab)^7 = (2^6 \times 3^8)^7 = 2^{42} \times 3^{56}$$

따라서 $n = 42$, $m = 56$ 이므로 $m - n = 14$ 이다.

14. $f(x) = 2^x$ 을 나타낸다고 할 때, 다음을 만족하는 x, y, z 의 합을 구하여라.

- $f(4) = x$
- $f(y) = \frac{1}{8}$
- $f(2) + f(z) \times f(-3) = 6$

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$$f(4) = 2^4 = 16 \quad \therefore x = 16$$

$$f(y) = 2^y = \frac{1}{8} \quad \therefore y = -3$$

$$f(2) + f(z) \times f(-3) = 6$$

$$2^2 + 2^z \times 2^{-3} = 6$$

$$4 + 2^z \times \frac{1}{8} = 6$$

$$2^z \times \frac{1}{8} = 2, \quad 2^z = 16 \quad \therefore z = 4$$

$$\therefore x + y + z = 16 - 3 + 4 = 17$$