1. $64 \times 125 \times 256 \times 625$ 는 $n + 1$ 자리 자연수이다. 이 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} 64 \times 125 \times 256 \times 625 &= 2^6 \times 5^3 \times 2^8 \times 5^4 \\ &= 2^7 \times (2 \times 5)^7 \\ &= 2^7 \times 10^7 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 $64 \times 125 \times 256 \times 625 = 128 \times 10^7$ 이므로 10 자리의 자연수이다.

$\therefore n = 9$

2. 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나올 수 있는 경우의 수를 순서쌍 (a, b) 로 나타낼 때 $(a \times b)$ 의 값이 짝수가 되는 순서쌍에 대하여 $\frac{a}{b}$ 의 값 중 유한소수가 되는 수의 개수를 구하여라. (단 $a \neq b, a < b$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 7개

해설

$(a \times b)$ 의 값이 짝수가 되기 위해서는 a, b 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

순서쌍을 구해 보면

(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)

이 중 $\frac{a}{b}$ 의 값이 유한소수가 되는 것은 기약분수의 분모에 2나 5 이외의 소인수가 없는 경우이므로

(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5) 7가지 경우이다.

3. 분수 $\frac{a}{180}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 되고 기약분수로 나타내면 $\frac{7}{b}$ 이 될 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 100 이하의 자연수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 83

해설

$$\frac{a}{180} = \frac{a}{2^2 \times 5 \times 3^2} = \frac{7}{b}$$

a 는 $3^2 \times 7$ 의 배수

$$a = 63, b = 20$$

$$\therefore a + b = 83$$

4. 분수 $\frac{x}{90}$ 는 유한소수로 나타낼 수 있고, 그 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{1}{y}$ 이 된다. x 가 $10 \leq x \leq 20$ 인 정수일 때, $x+y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 23

해설

$\frac{x}{90}$ 에서 분모 $90 = 2 \times 5 \times 3 \times 3$ 으로 소인수분해된다.

유한소수는 분모에 2, 5 만 있어야 하므로

$x = 9$ 의 배수 즉, 18이고

$\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$ 으로 약분되므로

$y = 5$ 이다.

그러므로 $x + y = 23$ 이다

5. 두 순환소수 $0.a2b$ 와 $0.ab2$ 의 합이 $\frac{307}{333}$ 일 때 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 4$

▷ 정답: $b = 9$

해설

$$\frac{100a + 20 + b}{999} + \frac{100a + 10b + 2}{999} = \frac{307}{333}$$

$$200a + 11b + 22 = 921$$

$$200a + 11b = 899$$

$$11b < 100 \text{ 이므로 } 200a = 800$$

$$\therefore a = 4, b = 9$$

6. $0.\dot{2}\dot{8} = a \times 0.\dot{0}\dot{1}$, $0.02\dot{8} = b \times 0.00\dot{1}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$0.\dot{2}\dot{8} = \frac{28}{99} = 28 \times \frac{1}{99} = 28 \times 0.\dot{0}\dot{1}$$

$$\therefore a = 28$$

$$0.02\dot{8} = \frac{28 - 2}{900} = \frac{26}{900} = 26 \times \frac{1}{900} = 26 \times 0.00\dot{1}$$

$$\therefore b = 26$$

$$\therefore a - b = 28 - 26 = 2$$

7. $\frac{1}{7}$ 은 순환소수이다. 소수점아래 10, 20, 30 번째 자리의 숫자를 각각 a, b, c 라 할 때, $a + 0.1 \times b + 0.01 \times c$ 가 나타내는 수는?

- ① 4.12 ② 5.21 ③ 2.15 ④ 8.24 ⑤ 8.47

해설

$\frac{1}{7} = 0.14285\dot{7}$ 로 순환마디는 6 자리이므로

$10 \div 6 = 1 \cdots 4$ 이므로 $a = 8$

같은 방법으로 $20 \div 6 = 3 \cdots 2$, $30 \div 6 = 5 \cdots 0$ 이므로 $b = 4$, $c = 7$

따라서 $a + 0.1 \times b + 0.01 \times c = 8 + 0.4 + 0.07 = 8.47$ 이다.

8. 정수, 자연수, 유한소수, 무한소수, 순환소수에 대하여, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

- ㉠ 정수와 무한소수의 합은 무한소수이다.
- ㉡ 자연수와 순환소수의 곱은 순환소수이다.
- ㉢ 무한소수와 순환소수의 합은 순환소수이다.
- ㉣ 자연수와 유한소수의 합은 순환소수이다.
- ㉤ 유한소수와 무한소수의 합은 유한소수이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉡

해설

㉢ 무한소수와 순환소수의 합은 무한소수이다.
무한소수에는 순환하지 않는 무한소수도 있다.
㉣ 자연수와 유한소수의 합은 유한소수이다.
㉤ 유한소수와 무한소수의 합은 무한소수이다.
무한소수에는 순환하지 않는 무한소수도 있다.

9. $5^a \times 9 = 225$, $3 \times 2^b = 192$ 일 때, $a \times b$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

225를 소인수분해하면 $3^2 \times 5^2$ 이므로
 $3^2 \times 5^2 = 5^a \times 9 = 5^a \times 3^2$ 이다.
192를 소인수분해하면 3×2^6 이므로
 $3 \times 2^6 = 3 \times 2^b$ 이다.
 $\therefore a = 2, b = 6$

10. 자연수 n 에 대하여 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 으로 정의한다. $n \times 14! = k^2$ (k 는 자연수)이기 위한 가장 작은 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 858

해설

$$n \times 14! = k^2$$

$$\begin{aligned} 14! &= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \\ &\quad \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \\ &= 2^{11} \times 3^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

주어진 식이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서는 소인수들의 지수가 짝수가 되어야 하므로 가장 작은 자연수 n 은

$$n = 2 \times 3 \times 11 \times 13 = 858$$

11. 0.8^{10} 을 소수로 나타내어라. (단, $2^{10} \approx 1000$ 으로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{10}$

해설

$$0.8^{10} = \left(\frac{8}{10}\right)^{10} = \left(\frac{2^3}{10}\right)^{10} = \frac{(2^{10})^3}{10^{10}}$$

$2^{10} \approx 10^3$ 이므로

$$(\text{준식}) = \frac{(2^{10})^3}{10^{10}} = \frac{(10^3)^3}{10^{10}} = \frac{10^9}{10^{10}} = \frac{1}{10}$$

따라서 주어진 식을 소수로 나타내면 0.1 이다.

12. $2430 = 3^x + 3^{x+2}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2430 = 3^x + 3^{x+2} = 3^x(1 + 3^2) = 3^x \cdot 10$$

$$243 = 3^x$$

$$\therefore x = 5$$

13. 자연수 n 에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.

$$\frac{(-x)^n \times (-x)^{n+1} + x^{2n+1}}{27x^{2n+1}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & \frac{(-x)^n \times (-x)^{n+1} + x^{2n+1}}{27x^{2n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n (-1)^{n+1} \times x^n x^{n+1}}{27x^{2n+1}} + \frac{1}{27} \\ & (-1)^n (-1)^{n+1} \text{ 은 } n \text{ 이 짝수, 홀수일 때 모두 } -1 \text{ 이다. 따라서} \\ & \frac{(-1)^n (-1)^{n+1} \times x^n x^{n+1}}{27x^{2n+1}} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{(-1) \times x^{2n+1}}{27x^{2n+1}} + \frac{1}{27} = -\frac{1}{27} + \frac{1}{27} = 0 \end{aligned}$$

14. 유리수 a, b 에 대하여 $\left(\frac{2b}{a}\right)^2 \approx \pi$ 이다. 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이와 한 변의 길이가 $2kr$ 인 정사각형의 넓이가 같을 때, 유리수 k 를 a, b 를 사용한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{b}{a}$

해설

(반지름의 길이가 r 인 원의 넓이) $= \pi r^2$

(한변의 길이가 $2kr$ 인 정사각형의 넓이)

$$= (2kr)^2 = 4k^2 r^2$$

따라서 $\pi r^2 = 4k^2 r^2$

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2 \approx \pi \text{ 이므로}$$

$$\pi r^2 \approx \left(\frac{2b}{a}\right)^2 r^2 = 4k^2 r^2$$

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2 r^2 = 4k^2 r^2$$

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2 = 4k^2 = (2k)^2$$

$$\frac{2b}{a} = 2k$$

$$\therefore k = \frac{b}{a}$$