

1. $64 \times 125 \times 256 \times 625$ 는 $n + 1$ 자리 자연수이다. 이 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} 64 \times 125 \times 256 \times 625 &= 2^6 \times 5^3 \times 2^8 \times 5^4 \\ &= 2^7 \times (2 \times 5)^7 \\ &= 2^7 \times 10^7 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 $64 \times 125 \times 256 \times 625 = 128 \times 10^7$ 이므로 10 자리의 자연수이다.

$$\therefore n = 9$$

2. 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나올 수 있는 경우의 수를 순서쌍 (a, b) 로 나타낼 때 $(a \times b)$ 의 값이 짝수가 되는 순서쌍에 대하여 $\frac{a}{b}$ 의 값 중 유한소수가 되는 수의 개수를 구하여라. (단 $a \neq b, a < b$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 7 개

해설

$(a \times b)$ 의 값이 짝수가 되기 위해서는 a, b 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

순서쌍을 구해 보면

$(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$

이 중 $\frac{a}{b}$ 의 값이 유한소수가 되는 것은 기약분수의 분모에 2 나 5 이외의 소인수가 없는 경우이므로

$(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5)$ 7가지 경우이다.

3. 분수 $\frac{a}{180}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 되고 기약분수로 나타내면 $\frac{7}{b}$ 이 될 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 100 이하의 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 83

해설

$$\frac{a}{180} = \frac{a}{2^2 \times 5 \times 3^2} = \frac{7}{b}$$

a 는 $3^2 \times 7$ 의 배수

$$a = 63, \quad b = 20$$

$$\therefore a + b = 83$$

4. 분수 $\frac{x}{90}$ 는 유한소수로 나타낼 수 있고, 그 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{1}{y}$ 이 된다. x 가 $10 \leq x \leq 20$ 인 정수일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$\frac{x}{90}$ 에서 분모 $90 = 2 \times 5 \times 3 \times 3$ 으로 소인수분해된다.

유한소수는 분모에 2, 5 만 있어야 하므로

$x = 9$ 의 배수 즉, 18이고

$\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$ 으로 약분되므로

$y = 5$ 이다.

그러므로 $x + y = 23$ 이다

5. 두 순환소수 $0.\dot{a}2\dot{b}$ 와 $0.\dot{a}b\dot{2}$ 의 합이 $\frac{307}{333}$ 일 때 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 4$

▷ 정답: $b = 9$

해설

$$\frac{100a + 20 + b}{999} + \frac{100a + 10b + 2}{999} = \frac{307}{333}$$

$$200a + 11b + 22 = 921$$

$$200a + 11b = 899$$

$$11b < 100 \text{ 이므로 } 200a = 800$$

$$\therefore a = 4, b = 9$$

6. $0.\dot{2}\dot{8} = a \times 0.\dot{0}\dot{1}$, $0.02\dot{8} = b \times 0.00\dot{1}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$0.\dot{2}\dot{8} = \frac{28}{99} = 28 \times \frac{1}{99} = 28 \times 0.\dot{0}\dot{1}$$

$$\therefore a = 28$$

$$0.02\dot{8} = \frac{28 - 2}{900} = \frac{26}{900} = 26 \times \frac{1}{900} = 26 \times 0.00\dot{1}$$

$$\therefore b = 26$$

$$\therefore a - b = 28 - 26 = 2$$

7. $\frac{1}{7}$ 은 순환소수이다. 소수점아래 10, 20, 30 번째 자리의 숫자를 각각 a , b , c 라 할 때, $a + 0.1 \times b + 0.01 \times c$ 가 나타내는 수는?

① 4.12

② 5.21

③ 2.15

④ 8.24

⑤ 8.47

해설

$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ 로 순환마디는 6 자리이므로

$10 \div 6 = 1 \cdots 4$ 이므로 $a = 4$

같은 방법으로 $20 \div 6 = 3 \cdots 2$, $30 \div 6 = 5 \cdots 0$ 이므로 $b = 2$, $c = 0$

따라서 $a + 0.1 \times b + 0.01 \times c = 4 + 0.2 + 0 = 4.2$ 이다.

8. 정수, 자연수, 유한소수, 무한소수, 순환소수에 대하여, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

- ㉠ 정수와 무한소수의 합은 무한소수이다.
- ㉡ 자연수와 순환소수의 곱은 순환소수이다.
- ㉢ 무한소수와 순환소수의 합은 순환소수이다.
- ㉣ 자연수와 유한소수의 합은 순환소수이다.
- ㉤ 유한소수와 무한소수의 합은 유한소수이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉡

해설

- ㉢ 무한소수와 순환소수의 합은 무한소수이다.
무한소수에는 순환하지 않는 무한소수도 있다.
- ㉣ 자연수와 유한소수의 합은 유한소수이다.
- ㉤ 유한소수와 무한소수의 합은 무한소수이다.
무한소수에는 순환하지 않는 무한소수도 있다.

9. $5^a \times 9 = 225$, $3 \times 2^b = 192$ 일 때, $a \times b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

225를 소인수분해하면 $3^2 \times 5^2$ 이므로

$3^2 \times 5^2 = 5^a \times 9 = 5^a \times 3^2$ 이다.

192를 소인수분해하면 3×2^6 이므로

$3 \times 2^6 = 3 \times 2^b$ 이다.

$\therefore a = 2, b = 6$

10. 자연수 n 에 대하여 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 으로 정의한다. $n \times 14! = k^2$ (k 는 자연수) 이기 위한 가장 작은 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 858

해설

$$n \times 14! = k^2$$

$$\begin{aligned} 14! &= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \\ &\quad \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \\ &= 2^{11} \times 3^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

주어진 식이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서는 소인수들의 지수가 짝수가 되어야 하므로 가장 작은 자연수 n 은

$$n = 2 \times 3 \times 11 \times 13 = 858$$

11. 0.8^{10} 을 소수로 나타내어라. (단, $2^{10} \approx 1000$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{10}$

해설

$$0.8^{10} = \left(\frac{8}{10}\right)^{10} = \left(\frac{2^3}{10}\right)^{10} = \frac{(2^{10})^3}{10^{10}}$$

$2^{10} \approx 10^3$ 이므로

$$(\text{준식}) = \frac{(2^{10})^3}{10^{10}} = \frac{(10^3)^3}{10^{10}} = \frac{10^9}{10^{10}} = \frac{1}{10}$$

따라서 주어진 식을 소수로 나타내면 0.1 이다.

12. $2430 = 3^x + 3^{x+2}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2430 = 3^x + 3^{x+2} = 3^x(1 + 3^2) = 3^x \cdot 10$$

$$243 = 3^x$$

$$\therefore x = 5$$

13. 자연수 n 에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.

$$\frac{(-x)^n \times (-x)^{n+1} + x^{2n+1}}{27x^{2n+1}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & \frac{(-x)^n \times (-x)^{n+1} + x^{2n+1}}{27x^{2n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n(-1)^{n+1} \times x^n x^{n+1}}{27x^{2n+1}} + \frac{1}{27} \\ & \quad (-1)^n(-1)^{n+1} \text{ 은 } n \text{ 이 짝수, 홀수일 때 모두 } -1 \text{ 이다. 따라서} \\ & \frac{(-1)^n(-1)^{n+1} \times x^n x^{n+1}}{27x^{2n+1}} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{(-1) \times x^{2n+1}}{27x^{2n+1}} + \frac{1}{27} = -\frac{1}{27} + \frac{1}{27} = 0 \end{aligned}$$

14. 유리수 a, b 에 대하여 $\left(\frac{2b}{a}\right)^2 \doteq \pi$ 이다. 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이와 한 변의 길이가 $2kr$ 인 정사각형의 넓이가 같을 때, 유리수 k 를 a, b 를 사용한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{b}{a}$

해설

$$(\text{반지름의 길이가 } r \text{인 원의 넓이}) = \pi r^2$$

$$(\text{한변의 길이가 } 2kr \text{인 정사각형의 넓이})$$

$$= (2kr)^2 = 4k^2 r^2$$

$$\text{따라서 } \pi r^2 = 4k^2 r^2$$

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2 \doteq \pi \text{ 이므로}$$

$$\pi r^2 \doteq \left(\frac{2b}{a}\right)^2 r^2 = 4k^2 r^2$$

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2 r^2 = 4k^2 r^2$$

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2 = 4k^2 = (2k)^2$$

$$\frac{2b}{a} = 2k$$

$$\therefore k = \frac{b}{a}$$