

1. 다음과 같은 규칙으로 수를 나열하였을 때, 25^{18} 과 크기가 같은 수는 몇 번 나오는지 구하여라.

1	2	3	4	...
1	2^2	3^2	4^2	...
1	2^3	3^3	4^3	...
1	2^4	3^4	4^4	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

▶ **답:** 번

▶ 정답 : 9 번

해설

$$25^{18} = (5^2)^{18} = 5^{36}$$

으로 나타낼 수 있다.

자연수 m, n 에 대하여 $(5^m)^n = 5^{mn} = 5^{36}$ 일 때, $mn = 36$ 이

되는 순서쌍 (m, n) 은 36 의 약수의 개수만큼 나타난다.

따라서 $36 = 2^2 \times 3^2$ 에서 36 의 약수의 개수는 $(2+1) \times (2+1) = 9$

2. 분수 $\frac{6}{2^2 \times 5^3 \times a}$ 을 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 두 자리 자연수 중에서 a 가 될 수 있는 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 96

해설

$$96 = 2^5 \times 3$$

3. $\frac{x}{120}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 기약분수로 나타내면 $\frac{1}{y}$ 이다.
 x 가 $10 < x < 60$ 인 자연수일 때, $x - y$ 의 값을 모두 구하여라.
- ▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

▶ 정답 : 7

▶ 정답 : 19

▶ 정답 : 26

해설

$\frac{x}{120} = \frac{x}{2^3 \times 3 \times 5}$ 를 유한소수로 나타내기 위해서는 분모의 소인수인 3 이 약분되어야 하므로 x 는 3 의 배수이다.
한편 $\frac{x}{120}$ 를 약분하여 기약분수로 나타내면 $\frac{1}{y}$ 이므로 x 는 120 의 약수이다.
따라서 x 는 $10 < x < 60$ 인 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 의 약수이면서 3 의 배수이므로 $x = 12, 15, 24, 30$
 $x = 12$ 일 때, $y = 10$
 $x = 15$ 일 때, $y = 8$
 $x = 24$ 일 때, $y = 5$
 $x = 30$ 일 때, $y = 4$
 $x - y = 2, 7, 19, 26$

4. $b < a$ 인 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 는 기약분수이고, $\frac{10^3 b}{a}$ 는 자연수이다. a 에 해당하는 자연수로서 두 자리 자연수 중 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$\frac{b}{a}$ 는 기약분수이므로 a, b 는 서로소이고,
 $\frac{10^3 b}{a}$ 는 자연수이므로 a 는 10^3 의 약수이다.

	2^0	2^1	2^2	2^3
5^0	1	2	4	8
5^1	5	10	20	40
5^2	25	50	100	200
5^3	125	250	500	1000

따라서 a 를 소인수분해하면 $2^x \times 5^y$ (x, y 는 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
 a 에 해당하는 자연수를 표로 나타내보면 아래와 같다. 따라서 두 자리 수 중 최댓값은 50 이고 최솟값은 10 이다.
 $\therefore 50 + 10 = 60$

5. 자연수 n 에 대하여 a_n 을 2^n 의 일의 자리의 숫자라고 정의하고, b_n 을 3^n 의 일의 자리의 숫자라고 정의할 때, 소수 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots a_nb_n\cdots$ 의 순환마디의 각 자리수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

a_n 에서

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 6(\because 2^4 = 16),$$

$$a_5 = 2(\because 2^5 = 32), a_6 = 4(\because 2^6 = 64), a_7 = 8(\because 2^7 = 128), a_8 = 6(\because 2^8 = 256) \cdots$$

b_n 에서

$$b_1 = 3, b_2 = 9, b_3 = 7(\because 3^3 = 27), b_4 = 1(\because 3^4 = 81),$$

$$b_5 = 3(\because 3^5 = 243), b_6 = 9(\because 3^6 = 729), b_7 = 7(\because 3^7 = 2187), b_8 = 1(\because 3^8 = 6561) \cdots$$

$$\text{따라서 주어진 소수 } 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots a_nb_n\cdots = 0.2349876123498761\cdots = 0.\dot{2}349876\dot{1}$$

$$\therefore \text{순환마디 각 자리수의 합} = 2 + 3 + 4 + 9 + 8 + 7 + 6 + 1 = 40$$

6. 분수 $\frac{5}{13}$ 를 소수 n 번째 자리의 수를 X_n 이라 할 때, $X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 227

해설

$\frac{5}{13} = 0.38461\dot{5}$ 이므로 순환마디의 숫자 6 개

$50 = 6 \times 8 + 2$ 이므로

$X_1 + X_2 + \cdots + X_{50} = (3 + 8 + 4 + 6 + 1 + 5) \times 8 + (3 + 8) = 227$

7. 분수 $\frac{3}{7}$ 을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 40 번째 자리에 오는 수를 a , 62 번째 자리에 오는 수를 b 라고 할 때, $0.\dot{a}b-0.\dot{b}a$ 의 값을 순환소수로 구하면?

① 0.13 ② 0.19 ③ 0.23 ④ 0.27 ⑤ 0.31

해설

$$\begin{aligned}\frac{3}{7} &= 0.428571, 40 = 6 \times 6 + 4 & \therefore a = 5 \\ 62 &= 6 \times 10 + 2 & \therefore b = 2 \\ \therefore 0.\dot{a}b - 0.\dot{b}a &= 0.5\dot{2} - 0.2\dot{5} = 0.2\dot{7}\end{aligned}$$

8. $a \odot b$ 를 $\begin{cases} a \neq b \text{이면 } 1 \\ a = b \text{이면 } 0 \end{cases}$ 이라 할 때, $a = 0.29, b = \frac{1}{45}, c = \frac{3}{10}, d = 0.02$ 에 대하여 $(a \odot c) \odot (b \odot d)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$a = c = \frac{3}{10}, b = \frac{1}{45} \neq d = \frac{2}{99}$$

$$(a \odot c) \odot (b \odot d) = 0 \odot 1 = 1$$

9. n 이 자연수일 때, $\{(-1)^{n+1}\}^{n+2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\{(-1)^{n+1}\}^{n+2} = (-1)^{(n+1)(n+2)}$ 에서
1) n 이 홀수일 때, $n + 1$ 은 짝수, $n + 2$ 는 홀수이므로 -1 의
지수는 (짝수) $\times$ (홀수)=(짝수)
 $\therefore (-1)^{\text{짝수}} = 1$
2) n 이 짝수일 때, $n + 1$ 은 홀수, $n + 2$ 는 짝수이므로 -1 의
지수는 (홀수) $\times$ (짝수)=(짝수)
 $\therefore (-1)^{\text{짝수}} = 1$
따라서, 자연수 n 의 값에 관계없이 $(n + 1)(n + 2)$ 는 짝수가
되므로
 $\{(-1)^{n+1}\}^{n+2} = (-1)^{(n+1)(n+2)} = 1$ 이 항상 성립한다.

10. $10^n = A$ 라 할 때, $5^n(2^{n+2} + 2^n)$ 을 A 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $5A$

해설

$$\begin{aligned} 5^n(2^{n+2} + 2^n) &= 5^n(2^n \times 2^2 + 2^n) \\ &= 5^n(4 \times 2^n + 2^n) \\ &= 5^n(5 \times 2^n) \\ &= 5 \times 2^n \times 5^n \\ &= 5 \times (2 \times 5)^n \\ &= 5 \times 10^n \\ &= 5A \end{aligned}$$

11. 3^{2009} 의 일의 자리의 숫자를 a 라 하고, $x = 3^{10}$ 일 때, 3^x 의 일의 자리의 숫자를 b 라 한다. 이 때, 13^{ab} 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

3의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 순서대로 반복된다.

따라서 3^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 $2009 = 4 \times 502 + 1$ 이므로 3이다. $\therefore a = 3$

또, $10 = 4 \times 2 + 2$ 이므로 3^{10} 의 일의 자리의 숫자는 9이다.

즉, $x = 3^{10}$ 일 때, 3^x 의 일의 자리의 숫자는 3^9 의 일의 자리의 숫자와 같으므로 3이다. $\therefore b = 3$

13^{ab} 즉, 13^9 의 일의 자리의 숫자는 3^9 의 일의 자리의 숫자와 같고

$9 = 4 \times 2 + 1$ 이므로 일의 자리의 숫자는 3이다.

12. 임의의 자연수 a, b 에 대하여 $x^a y^b = (3^{-1})^{b-a}$ 와 $x^b y^a = (3^{-1})^{a-b}$ 일 때, xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x^a y^b = (3^{-1})^{b-a} \dots \textcircled{1}$$

$$x^b y^a = (3^{-1})^{a-b} \dots \textcircled{2} \text{ 이라 할 때}$$

두 식을 좌변끼리 우변끼리 각각 곱하면

$$\begin{aligned} (3^{-1})^{b-a} \times (3^{-1})^{a-b} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{b-a} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{a-b} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{b-a+a-b} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^a y^b \times x^b y^a &= x^{a+b} \times y^{a+b} \\ &= (xy)^{a+b} \end{aligned}$$

$a + b$ 가 자연수 이므로 $(xy)^{a+b} = 1$ 을 만족하는 xy 는 1 이다.

13. 다음 $(x^3y)^a \times (x^3y^2)^b \div (x^3y)^2 = x^3y^2$ 에서 자연수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

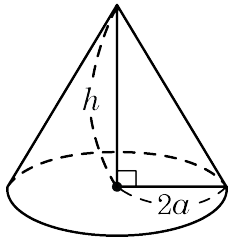
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & (x^3y)^a \times (x^3y^2)^b \div (x^3y)^2 \\ &= x^{3a}y^a \times x^{3b}y^{2b} \times \frac{1}{x^6y^2} \\ & x^{3a+3b-6}y^{a+2b-2} = x^3y^2 \\ & 3a+3b-6=3 \\ & \therefore a+b=3 \\ & a+2b-2=2 \\ & \therefore a+2b=4 \\ & \therefore a=2, b=1 \end{aligned}$$

14. 다음 그림은 부피가 $36a^2\pi$ 이고 밑면의 반지름의 길이가 $2a$ 인 원뿔이다. 원뿔의 높이 h 를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$\frac{1}{3} \times (\text{밑넓이}) \times (\text{높이}) = (\text{원뿔의부피})$ 이므로

$$\frac{1}{3} \times \pi \times (2a)^2 \times h = 36a^2\pi$$

$$\frac{4a^2\pi}{3} \times h = 36a^2\pi$$

$$\therefore h = 27$$

15. $A = 3x^2 - 4$, $B = 2x^2 + 3x - \frac{1}{2}$, $C = x^2 - 7x + \frac{5}{2}$ 일 때, $B - \left(\frac{1}{3}A + C\right) + (2C + B + A)$ 를 x 에 대한 식으로 나타내었다. 이때, 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{6}$

해설

$$B - \left(\frac{1}{3}A + C\right) + (2C + B + A)$$

$$= B - \frac{1}{3}A - C + 2C + B + A$$

$$= \frac{2}{3}A + 2B + C$$

이므로 A , B , C 의 식을 대입하면

$$\frac{2}{3}A + 2B + C$$

$$= \frac{2}{3}(3x^2 - 4) + 2\left(2x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) + x^2 - 7x + \frac{5}{2}$$

$$= 2x^2 - \frac{8}{3} + 4x^2 + 6x - 1 + x^2 - 7x + \frac{5}{2}$$

$$= 7x^2 - x - \frac{7}{6}$$

따라서 상수항은 $-\frac{7}{6}$ 이다.