1. 다음과 같은 규칙으로 수를 나열하였을 때, 25^{18} 과 크기가 같은 수는 몇 번 나오는지 구하여라.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & \cdots \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

▶ 답 : 번

▷ 정답 : 9 번

해설

$25^{18}=(5^2)^{18}=5^{36}$ 으로 나타낼 수 있다.
자연수 m, n 에 대하여 $(5^m)^n=5^{mn}=5^{36}$ 일 때, $mn=36$ 이 되는 순서쌍 $(m,\ n)$ 은 36 의 약수의 개수만큼 나타난다.
따라서 $36=2^2\times3^2$ 에서 36 의 약수의 개수는 $(2+1)\times(2+1)=9$ (개) 이므로 25^{18} 과 크기가 같은 수는 모두 9 번 나온다.

2. 분수 $\dfrac{6}{2^2 \times 5^3 \times a}$ 을 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 두 자리 자연수 중에서 a 가 될 수 있는 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 96

해설

$96 = 2^5 \times 3$

3. $\frac{x}{120}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 기약분수로 나타내면 $\frac{1}{y}$ 이다. x 가 $10 < x < 60$ 인 자연수일 때, $x - y$ 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 19

▷ 정답 : 26

해설

$\frac{x}{120} = \frac{x}{2^3 \times 3 \times 5}$ 를 유한소수로 나타내기 위해서는 분모의 소인수인 3 이 약분되어야 하므로 x 는 3 의 배수이다.

한편 $\frac{x}{120}$ 를 약분하여 기약분수로 나타내면 $\frac{1}{y}$ 이므로 x는 120 의 약수이다.

따라서 x는 $10 < x < 60$ 인 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 의 약수이면서 3 의 배수이므로 $x = 12, 15, 24, 30$

$x = 12$ 일 때, $y = 10$

$x = 15$ 일 때, $y = 8$

$x = 24$ 일 때, $y = 5$

$x = 30$ 일 때, $y = 4$

$x - y = 2, 7, 19, 26$

4. $b < a$ 인 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 는 기약분수이고, $\frac{10^3 b}{a}$ 는 자연수이다. a 에 해당하는 자연수로서 두 자리 자연수 중 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$\frac{b}{a}$ 는 기약분수이므로 a, b 는 서로소이고,
$\frac{10^3 b}{a}$ 는 자연수이므로 a 는 10^3 의 약수이다.
따라서 a 를 소인수분해하면 $2^x \times 5^y$ (x, y 는 음이 아닌 정수) 의 꼴이다.

	2^0	2^1	2^2	2^3
5^0	1	2	4	8
5^1	5	10	20	40
5^2	25	50	100	200
5^3	125	250	500	1000

a 에 해당하는 자연수를 표로 나타내보면 아래와 같다. 따라서 두 자리 수 중 최댓값은 50 이고 최솟값은 10 이다.
$\therefore\ 50 + 10 = 60$

5. 자연수 n 에 대하여 a_n 을 2^n 의 일의 자리의 숫자라고 정의하고, b_n 을 3^n 의 일의 자리의 숫자라고 정의할 때, 소수 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots a_nb_n\cdots$ 의 순환마디의 각 자릿수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

a_n 에서
$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 6(\because 2^4 = 16),$
$a_5 = 2(\because 2^5 = 32), a_6 = 4(\because 2^6 = 64), a_7 = 8(\because 2^7 = 128), a_8 = 6(\because 2^8 = 256)\cdots$
b_n 에서
$b_1 = 3, b_2 = 9, b_3 = 7(\because 3^3 = 27), b_4 = 1(\because 3^4 = 81),$
$b_5 = 3(\because 3^5 = 243), b_6 = 9(\because 3^6 = 729), b_7 = 7(\because 3^7 = 2187), b_8 = 1(\because 3^8 = 6561)\cdots$
따라서 주어진 소수 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots a_nb_n\cdots = 0.2349876123498761\cdots = 0.\dot{2}349876\dot{1}$
$\therefore$ 순환마디 각 자리수의 합 $= 2+3+4+9+8+7+6+1 = 40$

6. 분수 $\frac{5}{13}$ 를 소수 n 번째 자리의 수를 X_n 이라 할 때, $X_1+X_2+\cdots+X_{50}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 227

해설

$\frac{5}{13}=0.\dot{3}8461\dot{5}$ 이므로 순환마디의 숫자 6 개

$50=6\times8+2$ 이므로

$X_1+X_2+\cdots+X_{50}=(3+8+4+6+1+5)\times8+(3+8)=227$

7. 분수 $\frac{3}{7}$ 을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 40 번째 자리에 오는 수를 a, 62 번째 자리에 오는 수를 b 라고 할 때, $0.\dot{a}\dot{b}-0.\dot{b}\dot{a}$ 의 값을 순환소수로 구하면?

① $0.\dot{1}\dot{3}$ ② $0.\dot{1}\dot{9}$ ③ $0.\dot{2}\dot{3}$ ④ $0.\dot{2}\dot{7}$ ⑤ $0.\dot{3}\dot{1}$

해설

$\frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$, $40=6\times 6+4$ $\therefore\ a=5$

$62=6\times 10+2$ $\therefore\ b=2$

$\therefore\ 0.\dot{a}\dot{b}-0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{5}\dot{2}-0.\dot{2}\dot{5}=0.\dot{2}\dot{7}$

8. $a \circledcirc b$ 를 $\begin{cases} a \neq b \text{이면 } 1 \\ a = b \text{이면 } 0 \end{cases}$ 이라 할 때, $a = 0.2\dot{9}$, $b = \dfrac{1}{45}$, $c = \dfrac{3}{10}$, $d = 0.\dot{0}\dot{2}$ 에 대하여 $(a \circledcirc c) \circledcirc (b \circledcirc d)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$a = c = \dfrac{3}{10}$, $b = \dfrac{1}{45} \neq d = \dfrac{2}{99}$

$(a \circledcirc c) \circledcirc (b \circledcirc d) = 0 \circledcirc 1 = 1$

9. n 이 자연수일 때, $\{(-1)^{n+1}\}^{n+2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\{(-1)^{n+1}\}^{n+2} = (-1)^{(n+1)(n+2)}$ 에서

1) n 이 홀수일 때, $n+1$ 은 짝수, $n+2$ 는 홀수이므로 -1 의 지수는 (짝수)×(홀수)=(짝수)

$\therefore\ (-1)^{짝수} = 1$

2) n 이 짝수일 때, $n+1$ 은 홀수, $n+2$ 는 짝수이므로 -1 의 지수는 (홀수)×(짝수)=(짝수)

$\therefore\ (-1)^{짝수} = 1$

따라서, 자연수 n 의 값에 관계없이 $(n+1)(n+2)$ 는 짝수가 되므로

$\{(-1)^{n+1}\}^{n+2} = (-1)^{(n+1)(n+2)} = 1$ 이 항상 성립한다.

10. $10^n = A$ 라 할 때, $5^n(2^{n+2}+2^n)$ 을 A 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $5A$

해설

$$\begin{aligned} 5^n(2^{n+2}+2^n) &= 5^n(2^n \times 2^2 + 2^n) \\ &= 5^n(4 \times 2^n + 2^n) \\ &= 5^n(5 \times 2^n) \\ &= 5 \times 2^n \times 5^n \\ &= 5 \times (2 \times 5)^n \\ &= 5 \times 10^n \\ &= 5A \end{aligned}$$

11. 3^{2009} 의 일의 자리의 숫자를 a 라 하고, $x = 3^{10}$ 일 때, 3^x 의 일의 자리의 숫자를 b 라 한다. 이 때, 13^{ab} 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

3 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1 이 순서대로 반복된다.
따라서 3^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 $2009 = 4 \times 502 + 1$ 이므로 3 이다. $\therefore a = 3$
또, $10 = 4 \times 2 + 2$ 이므로 3^{10} 의 일의 자리의 숫자는 9 이다.
즉, $x = 3^{10}$ 일 때, 3^x 의 일의 자리의 숫자는 3^9 의 일의 자리의 숫자와 같으므로 3 이다. $\therefore b = 3$
13^{ab} 즉, 13^9 의 일의 자리의 숫자는 3^9 의 일의 자리의 숫자와 같고
$9 = 4 \times 2 + 1$ 이므로 일의 자리의 숫자는 3 이다.

12. 임의의 자연수 a, b 에 대하여 $x^a y^b = (3^{-1})^{b-a}$ 와 $x^b y^a = (3^{-1})^{a-b}$ 일 때, xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^a y^b = (3^{-1})^{b-a} \cdots$ ㉠

$x^b y^a = (3^{-1})^{a-b} \cdots$ ㉡ 이라 할 때

두 식을 좌변끼리 우변끼리 각각 곱하면

$$\begin{aligned}(3^{-1})^{b-a} \times (3^{-1})^{a-b} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{b-a} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{a-b} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{b-a+a-b} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^a y^b \times x^b y^a &= x^{a+b} \times y^{a+b} \\ &= (xy)^{a+b}\end{aligned}$$

$a+b$가 자연수 이므로 $(xy)^{a+b} = 1$을 만족하는 xy는 1이다.

13. 다음 $(x^3y)^a \times (x^3y^2)^b \div (x^3y)^2 = x^3y^2$ 에서 자연수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(x^3y)^a \times (x^3y^2)^b \div (x^3y)^2$

$= x^{3a}y^a \times x^{3b}y^{2b} \times \dfrac{1}{x^6y^2}$

$x^{3a+3b-6}y^{a+2b-2} = x^3y^2$

$3a + 3b - 6 = 3$

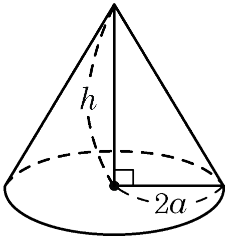
$\therefore a + b = 3$

$a + 2b - 2 = 2$

$\therefore a + 2b = 4$

$\therefore\ a = 2,\ b = 1$

14. 다음 그림은 부피가 $36a^2\pi$ 이고 밑면의 반지름의 길이가 $2a$ 인 원뿔이다. 원뿔의 높이 h 를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$\frac{1}{3}\times$(밑넓이)$\times$(높이) $=$ (원뿔의부피) 이므로

$$\frac{1}{3}\times\pi\times(2a)^2\times h = 36a^2\pi$$

$$\frac{4a^2\pi}{3}\times h = 36a^2\pi$$

$$\therefore\ h = 27$$

15. $A = 3x^2 - 4,\ B = 2x^2 + 3x - \frac{1}{2},\ C = x^2 - 7x + \frac{5}{2}$ 일 때, $B - \left(\frac{1}{3}A + C\right) + (2C + B + A)$ 를 x 에 대한 식으로 나타내었다. 이때, 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{6}$

해설

$$B - \left(\frac{1}{3}A + C\right) + (2C + B + A)$$

$$= B - \frac{1}{3}A - C + 2C + B + A$$

$$= \frac{2}{3}A + 2B + C$$

이므로 $A,\ B,\ C$ 의 식을 대입하면

$$\frac{2}{3}A + 2B + C$$

$$= \frac{2}{3}(3x^2 - 4) + 2\left(2x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) + x^2 - 7x + \frac{5}{2}$$

$$= 2x^2 - \frac{8}{3} + 4x^2 + 6x - 1 + x^2 - 7x + \frac{5}{2}$$

$$= 7x^2 - x - \frac{7}{6}$$

따라서 상수항은 $-\frac{7}{6}$ 이다.