

1. 7 이하의 자연수 a, b 에 대하여 $a \leq b$ 일 때, $[a, b] = a$, $< a, b > = b$ 라 하고, $a \diamond b = \frac{< a, b >}{[a, b]}$ 라고 정의할 때, $a \diamond b$ 의 값 중 무한소수가 되는 수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 12 개

해설

$a \diamond b = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}$ 이다. 이들 중 무한소수가 되는 수는

분모가 3 인 경우는 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

분모가 6 인 경우는 $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$

분모가 7 인 경우는 $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$

따라서 $2 + 4 + 6 = 12$ (개)

2. $\frac{a}{110}$ 를 약분하면 $\frac{1}{b}$ 이 되고, 이것을 소수로 나타내면 유한소수가 될 때, 정수 $a + b$ 의 값을 구하여라.(단, $10 < a < 20$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$\frac{a}{110} = \frac{a}{2 \times 5 \times 11}$ 가 유한소수가 되어야 하므로 a 는 11의 배수
이어야 한다.

따라서 $a = 11$ 이고, $b = 10$ 이다.

$$\therefore a + b = 11 + 10 = 21$$

3. $x = \frac{4}{9}$ 일 때, $x - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ 의 값을 순환소수로 나타내려고 한다. 이때,

순환마디를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} &= x - \frac{1}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} \\&= x - \frac{1}{\frac{x-1}{x}} \\&= x - \frac{x}{x-1}\end{aligned}$$

x 의 값을 대입하면

$$\frac{4}{9} - \frac{1}{-\frac{5}{4}} = \frac{4}{9} + \frac{4}{5} = \frac{56}{45} = 1.24444\ldots$$

따라서 순환마디는 4이다.

4. 다음 식을 만족하는 순환소수 x 의 순환마디의 각 자릿수의 합을 구하여라.

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}} = 0.\dot{4}0\dot{5}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$$(\text{우변}) = 0.\dot{4}0\dot{5} = \frac{405}{999} = \frac{45}{111}$$

$$\begin{aligned} (\text{좌변}) &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{x+1}} = 1 - \frac{x+1}{2x+1} \\ &= \frac{x}{2x+1} \end{aligned}$$

$$\frac{x}{2x+1} = \frac{45}{111} \text{ 이므로}$$

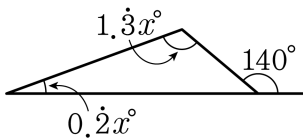
$$111x = 90x + 45$$

$$21x = 45$$

$$\therefore x = \frac{45}{21} = \frac{15}{7} = 2.\dot{1}428\dot{5}7$$

따라서 순환마디의 각 자릿수의 합은
 $1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27$ 이다.

5. 다음 삼각형에서 x 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 90

해설

삼각형의 두 내각의 합과 이웃하지 않는 한 외각의 크기는 같으므로 $0.2x^\circ + 1.3x^\circ = 140^\circ$ 가 된다.

$$0.2x^\circ + 1.3x^\circ = \frac{2}{9}x^\circ + \frac{12}{9}x^\circ = \frac{14x^\circ}{9} = 140^\circ$$

$$\therefore x = 90$$

6. 어떤 자연수에 $1.0\dot{4}$ 를 곱해야 할 것을 잘못하여 1.04 를 곱했더니 정답과 오답의 차가 $0.\dot{4}$ 가 되었다. 그 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

$$x \times 1.0\dot{4} - x \times 1.04 = 0.\dot{4}$$

$$x \times \left(\frac{94}{90} - \frac{104}{100} \right) = \frac{4}{9}$$

$$x \times \frac{4}{900} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore x = 100$$

7. $0.\dot{3}\dot{0} = a \times 0.\dot{0}\dot{1}$, $0.\dot{3}0\dot{0} = b \times 0.\dot{0}0\dot{1}$ 일 때, $|a - b|$ 의 값은?

① 150

② 220

③ 270

④ 320

⑤ 350

해설

$$0.\dot{3}\dot{0} = \frac{30}{99} = 30 \times \frac{1}{99} = 30 \times 0.\dot{0}\dot{1}$$

$$\therefore a = 30$$

$$0.\dot{3}0\dot{0} = \frac{300}{999} = 300 \times \frac{1}{999} = 300 \times 0.\dot{0}0\dot{1}$$

$$\therefore b = 300$$

$$\therefore |a - b| = |30 - 300| = 270$$

8. $x * y$ 를 $\begin{cases} x = y \text{ 이면 } 1 \\ x \neq y \text{ 이면 } -1 \end{cases}$ 이고, $a = 0.3$, $b = 0.\dot{3}$, $c = \frac{10}{33}$, $d = 0.2\dot{9}$, $e = \frac{1}{3}$ 일 때, 다음의 값을 구하여라.

$$(b * c) * (a * d) * (b * e)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$a = \frac{3}{10}, b = \frac{3}{9}, c = \frac{30}{99}, d = \frac{3}{10}, e = \frac{3}{9} \text{ 이므로}$$
$$(\text{준식}) = (-1) * 1 * 1 = (-1) * 1 = -1$$

9. 다음 마방진의 가로, 세로, 대각선의 곱이 모두 같아지도록 $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^8, 3^9$ 을 빈 칸에 채워 넣었을 때, $(B - D) \times (C - A)$ 의 값을 구하여라.

A	3^7	
B		3
	C	D

▶ 답 :

▷ 정답 : 236196

해설

2	7	6	A (3^2)	3^7	3^6
9	5	1	B (3^9)	3^5	3
4	3	8	3^4	C (3^3)	D (3^8)

밑이 같은 거듭제곱의 곱은 지수끼리의 합과 같으므로 지수만으로 가로, 세로, 대각선의 합이 모두 같은 마방진을 먼저 만든다.
(왼쪽 마방진)

밑을 3으로 하고 지수를 왼쪽 마방진의 수를 그대로 사용하면 오른쪽과 같이 가로, 세로, 대각선의 곱이 모두 3^{15} 가 되는 표가 완성된다.

따라서 $A(3^2), B(3^9), C(3^3), D(3^8)$ 이다.

$$\begin{aligned}
 &\therefore (B - D) \times (C - A) \\
 &= (3^9 - 3^8) \times (3^3 - 3^2) \\
 &= (3 \times 3^8 - 3^8) \times (3 \times 3^2 - 3^2) \\
 &= (2 \times 3^8) \times (2 \times 3^2) \\
 &= 4 \times 3^{10} \\
 &= 236196
 \end{aligned}$$

10. 다음 중 가장 큰 수는?

① 2^{30}

② 3^{20}

③ 4^{15}

④ 5^{10}

⑤ 9^5

해설

① $2^{30} = (2^3)^{10}$

② $3^{20} = (3^2)^{10}$

③ $4^{15} = 2^{30} = (2^3)^{10}$

④ 5^{10}

⑤ $9^5 = 3^{10}$

따라서 가장 큰 수는 ② 이다.

11. 다음 식이 성립하는 x, y 에 대하여 $2xy$ 의 값을 구하여라.

$$\frac{25^{(2x+y)}}{5^{(3x-2y)}} = \frac{1}{25}, \quad \frac{3^{(x+y)}}{81^{(x+y)}} = \frac{1}{27}$$

① 0

② -2

③ -4

④ -6

⑤ -8

해설

$$\frac{25^{(2x+y)}}{5^{(3x-2y)}} = \frac{5^{(4x+2y)}}{5^{(3x-2y)}} = 5^{4x+2y-(3x-2y)} = 5^{x+4y}$$

$$\therefore x + 4y = -2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{3^{(x+y)}}{81^{(x+y)}} = \frac{3^{(x+y)}}{3^{(4x+4y)}} = 3^{-3x-3y}$$

$$\therefore -3x - 3y = -3, \quad x + y = 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

이제 ㉠과 ㉡을 연립하면 $x = 2, y = -1$ 이므로
따라서 $2xy = -4$ 이다.

12. $2^n = x, 6^n = y$ 라 할 때, $(2^n + 2^{n+1}) \times 3^{n-1}$ 을 x, y 를 사용한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : y

해설

$$6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n, \quad 3^n = \frac{6^n}{2^n} = \frac{y}{x}$$

$$2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2 \times 2^n = (1 + 2) \times 2^n = 3 \times 2^n$$

$$\begin{aligned} \therefore (2^n + 2^{n+1}) \times 3^{n-1} &= (3 \times 2^n) \times 3^{n-1} \\ &= 3^n \times 2^n \\ &= \frac{y}{x} \times x = y \end{aligned}$$

13. $\frac{2^{10} \times 15^{20}}{45^{10}}$ 은 $a - 1$ 자리의 자연수이다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^{10} \times 15^{20}}{45^{10}} &= \frac{2^{10} \times (3 \cdot 5)^{20}}{(3^2 \cdot 5)^{10}} = \frac{2^{10} \times 3^{20} \times 5^{20}}{3^{20} \times 5^{10}} \\ &= 2^{10} \times 5^{10} = 10^{10}\end{aligned}$$

따라서 11 자리의 수 이므로 $a - 1 = 11$

$$\therefore a = 12$$

14. 밑면의 반지름의 길이가 r 이고, 높이가 h 인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 밑면의 반지름은 10% 늘리고, 높이는 10% 줄이면 부피는 원래 부피보다 몇 % 변화하는지 구하여라.

▶ 답 : %

▷ 정답 : 8.9 %

해설

$$(\text{처음 원뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

(변화된 원뿔의 부피)

$$= \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{110}{100} \times r \right)^2 \times \left(\frac{90}{100} \times h \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{11^2}{10^2} \times \frac{9}{10} \times \pi r^2 h$$

$$= \frac{1089}{1000} \times \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right)$$

변화된 원뿔의 부피는 처음 원뿔의 부피의 $\frac{1089}{1000}$ 배이므로 변화된 부피는

$$\left(\frac{1089}{1000} - 1 \right) \times 100 = 8.9(\%) \text{ 이다.}$$

15. 자연수 n 에 대하여 $f_n(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + (n-2)x^{n-2} + \cdots + 1$ 이라 할 때, $f_{100}(-1) - f_{99}(-1) + f_{98}(-1) - f_{97}(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$$f_{100}(-1) = 100(-1)^{100} + 99(-1)^{99} + 98(-1)^{98} + \cdots + 1$$

$$f_{99}(-1) = 99(-1)^{99} + 98(-1)^{98} + 97(-1)^{97} + \cdots + 1$$

$$f_{98}(-1) = 98(-1)^{98} + 97(-1)^{97} + 96(-1)^{96} + \cdots + 1$$

$$f_{97}(-1) = 97(-1)^{97} + 96(-1)^{96} + 95(-1)^{95} + \cdots + 1$$

$$\therefore f_{100}(-1) - f_{99}(-1) + f_{98}(-1) - f_{97}(-1) = 100 + 98 = 198$$

16. 네 개의 수 a, b, c, d 에 대하여 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ 로 정의한다.

$A = x + 1, B = -2x + 3$ 이고, $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & pA \\ A & -qB \end{pmatrix}$ 일 때, 상수 p, q 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $p = -1$

▷ 정답 : $q = 1$

해설

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & pA \\ A & -qB \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = -qB^2 - pA^2$$

$$(1+p)A^2 = (1-q)B^2$$

$$A = x + 1, B = -2x + 3 \text{ 이므로}$$

$$(1+p)(x+1)^2 = (1-q)(-2x+3)^2 \text{ 이다.}$$

$$(1+p)x^2 + (2+2p)x + (p+1)$$

$$= (4-4q)x^2 + (-12+12q)x + (9-9q)$$

$$1+p = 4-4q \Rightarrow p = 3-4q \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2+2p = -12+12q \Rightarrow 2p-12q = -14$$

$$\Rightarrow p-6q = -7 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$p+1 = 9-9q \Rightarrow p+9q = 8 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢ 어떤 식에 대입해도 상관없으므로 ㉠식을 ㉡식에 대입하면

$$3-4q-6q = -7, q = 1 \cdots \textcircled{㉣}$$

㉣를 ㉠식에 대입하면

$$p = 3-4 \times 1 = -1 \text{ 따라서 } p = -1, q = 1$$

17. $xy + \frac{1}{z} = 1$, $yz + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $\frac{xyz^2 - xyz}{(1-2x)(2x-1)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$$xy + \frac{1}{z} = 1, \frac{xyz + 1}{z} = 1, xyz = z - 1 \dots \textcircled{㉠}$$

$$yz + \frac{1}{x} = 2, \frac{xyz + 1}{x} = 2, xyz = 2x - 1 \dots \textcircled{㉡}$$

$$\frac{xyz^2 - xyz}{(1-2x)(2x-1)} = \frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2}$$

에 식 ㉠, ㉡을 대입하여 풀면,

$$\frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2} = \frac{xyz(xyz)}{-(xyz)^2} = -1$$