1. x가 1이상 50이하인 자연수일 때, $\frac{x}{105}$가 유한소수로 나타내어진다고 한다. 이때, x의 값이 될 수 있는 수는 모두 몇 개인가?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$105 = 3 \times 5 \times 7$이므로 x는 21의 배수이다.
따라서 21의 배수는 21, 42의 2개다.

2. $\frac{a}{70}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 기약분수로 고치면 $\frac{1}{b}$ 이다. a 가 가장 작은 한 자리의 자연수일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

$\frac{a}{70}=\frac{a}{2\times5\times7}$ 가 유한소수이려면 a 는 7 의 배수이어야 하고, 가장 작은 한 자리의 자연수이므로 7 이다. $\frac{7}{70}=\frac{7}{2\times5\times7}=\frac{1}{2\times5}=\frac{1}{10}$ 이므로 $b=10$ 이다.
따라서 $a+b=7+10=17$ 이다.

3. 경식이는 다음 계산을 하기 위해 계산기를 사용하고 있다. 마지막 = 버튼을 눌렀을 때, 계산기 화면에 소수점 아래의 어떤 자리부터 일정한 숫자의 배열이 계속 되풀이 되는 것은?

① $4 \div 25$　② $3 \div 18$　③ $11 \div 50$

④ $7 \div 4$　⑤ $21 \div 14$

해설

② $3 \div 18 = 0.16666\cdots$ 이므로 순환마디가 6 인 순환소수가 되어 일정한 숫자의 배열이 계속 되풀이 된다.

4. 양의 기약분수 $\frac{a}{b}$ 에 대하여 $\frac{a}{b} = 3.\dot{x} = \frac{99}{10y+z}$ 일 때, $x+y+z$ 의 값을 구하여라.
(단, x, y, z 는 한 자리 자연수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$\frac{a}{b} = 3.\dot{x} = \frac{30+x-3}{9} = \frac{27+x}{9}$

$\frac{a}{b} = \frac{27+x}{9} = \frac{99}{10y+z}$ 에서 x 가 한 자리의 자연수이므로

$\frac{(27+x)\times 3}{9\times 3} = \frac{81+3x}{27} = \frac{99}{10y+z}$, $81+3x = 99$

$\therefore x = 6$

$10y+z = 27$

$\therefore y = 2, z = 7$

$x+y+z = 6+2+7 = 15$

5. $\frac{20}{7}$ 를 소수로 나타낼 때, 소수 20 번째 자리의 숫자와 소수 30 번째 자리의 숫자의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$\frac{20}{7} = 2.857142857142\cdots$ 이므로 6 개의 숫자가 반복된다. $20 = 6 \times 3 + 2$ 이므로 20 번째 자리의 숫자는 5 이고 $30 = 6 \times 5 + 0$ 이므로 30 번째 자리의 숫자는 2 이다. 따라서 합은 7 이다.

6. $0.15\dot{8} = a \times 0.00\dot{1}$, $0.0\dot{5} = 5 \times b$ 일 때, ab를 분수로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{143}{90}$

해설

$\frac{158-15}{900} = a \times \frac{1}{900}$, $a = 143$

$\frac{5}{90} = 5 \times b$, $b = \frac{1}{90}$

$\therefore ab = \frac{143}{90}$

7. 다음 부등식을 만족하는 한 자리의 자연수 a 의 값을 모두 더하여라.

$$\frac{1}{6} < (0.\dot{a})^2 < \frac{5}{9}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{6} < (\frac{a}{9})^2 < \frac{5}{9}$

$\frac{27}{162} < \frac{2a^2}{162} < \frac{90}{162}$

따라서 $27 < 2a^2 < 90$,

$\frac{27}{2} < a^2 < 45$ 이므로 $a = 4,\ 5,\ 6$ 이다.

따라서 a 의 값을 모두 더하면 $4 + 5 + 6 = 15$ 이다.

8. $0.\dot{a}\dot{b}, 0.\dot{b}\dot{a}$인 두 수의 합이 $0.\dot{2}$이다. 두 수의 차를 순환소수로 나타냈을 때 순환마디를 구하면?(단, $a > b \geq 0$)

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

해설

$$\frac{10a+b}{99} + \frac{10b+a}{99} = \frac{11a+11b}{99} = \frac{11(a+b)}{99}$$
$$= \frac{a+b}{9} = 0.\dot{2} = \frac{2}{9}$$

$\therefore\ a+b=2 \therefore\ a=2,\ b=0$

$\frac{20}{99} - \frac{2}{99} = \frac{18}{99} = 0.\dot{1}\dot{8}$

따라서 순환마디는 18이다.

9. $x+y=3$ 이고, $A=2^{2x}$, $B=2^{2y}$ 일 때, AB 의 값은?

① 2^2 ② 2^4 ③ 2^6 ④ 2^8 ⑤ 2^{10}

해설

$AB=2^{2x}\times 2^{2y}=2^{2x+2y}=2^{2(x+y)}=2^{2\times 3}=2^6$ 이다.

10. $(-27)^3 \div (-3)^n = 3^4$ 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(-3)^9 \div (-3)^n = 3^4$
$9 - n = 4$
$\therefore\ n = 5$

11. 자연수 n 이 홀수일 때, 다음 식의 값을 구하여라.
$(-1)^n - (-1)^{n+1} - (-1)^{n+2} + (-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

n : 홀수, $n+1$: 짝수, $n+2$: 홀수
$2n$: 짝수, $2n+1$: 홀수이므로
$(-1) - (+1) - (-1) + (+1) - (-1) = 1$

12. $2^{17} \times 5^{20}$ 은 n 자리의 자연수이고, 3^{2008} 의 일의 자리의 숫자는 m 일 때, $n+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$2^{17} \times 5^{20} = (2^{17} \times 5^{17}) \times 5^3 = 125 \times 10^{17}$

$\therefore\ n = 20$

3^m 의 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1 로 반복되고

$2008 = 4 \times 502$ 이므로 $m = 1$

$\therefore\ n + m = 21$

13. $x_1 = 97,\ x_2 = \frac{2}{x_1},\ x_3 = \frac{3}{x_2},\ x_4 = \frac{4}{x_3},\ \cdots,\ x_{10} = \frac{10}{x_9}$ 이라 할 때, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3840

해설

$x_1 = 97$ 이고, $x_1 \times x_2 = 2$ 이고, $x_3 \times x_4 = 4$ 이다. 따라서 $x_9 \times x_{10} = 10$ 이 된다.

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_{10}$

$= (x_1 \cdot x_2) \times (x_3 \cdot x_4) \times \cdots \times (x_9 \cdot x_{10})$

$= 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 = 3840$

14. 반지름이 $4a$인 원기둥에 물이 h만큼 담겨져 있다. 이 원기둥에 반지름이 $2a$인 쇠공을 완전히 넣었을 때, 물의 높이는 얼마나 높아지는지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{2}{3}a$

해설

원기둥 모양의 그릇에 쇠공을 완전히 넣으면 물의 높이는

$h = \frac{(\text{쇠공의 부피})}{(\text{원기둥의 밑면의 넓이})}$ 만큼 높아진다.

원기둥의 채워져 있는 물의 높이를 h라고 한다면 원기둥의 물의 부피는 $\pi(4a)^2 \cdot h$이다.

(쇠공의 부피) $= \frac{4}{3}\pi(2a)^3$ 이므로

$h = \frac{\frac{32a^3\pi}{3}}{\frac{16a^2\pi}{1}} = \frac{32a^3\pi}{48a^2\pi} = \frac{2}{3}a$ 만큼 높아진다.

15. $x=2$, $y=\frac{1}{3}$, $z=-4$ 일 때, $\frac{xy^2z-2x^2y+5yz^2}{3x^2yz}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{13}{9}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{y}{3x}-\frac{2}{3z}+\frac{5z}{3x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{6}-\left(\frac{2}{-12}\right)+\left(-\frac{20}{12}\right) \\ &= \frac{1}{18}+\frac{1}{6}-\frac{5}{3} \\ &= -\frac{13}{9}\end{aligned}$$

16. 다음 조건을 만족하는 a, b 에 대하여 $\dfrac{(-3a^2b^3)^2}{4a^5b^5}$ 의 값을 구하여라.

a 의 4배는 b 의 5배와 같다.

▶ 답:

▷ 정답: $\dfrac{9}{5}$

해설

$4a = 5b$

$a = \dfrac{5b}{4}$

$(\text{준식}) = \dfrac{9a^4b^6}{4a^5b^5} = \dfrac{9b}{4a} = \dfrac{9b}{4 \times \dfrac{5b}{4}} = \dfrac{9b}{5b} = \dfrac{9}{5}$

17. 부등식 $\frac{x-2}{3}-\frac{2x-3}{4} \geq 1$ 을 만족하는 가장 큰 정수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

$\frac{x-2}{3}-\frac{2x-3}{4} \geq 1$, $4(x-2)-3(2x-3) \geq 12$, $-2x \geq 11$,

$x \leq -\frac{11}{2}$

따라서 가장 큰 정수는 -6 이다.