1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면 $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다. ㉡ 오름차순으로 정리하면 $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다. ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다. ㉣ x^3 의 계수는 3이다. ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢
② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. $2x^2-3x-2=a(x-1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x-1)$이 x에 대한 항등식이 되도록 $a,\ b,\ c$의 값을 정하면?

① $a=1,\ b=-1,\ c=2$
② $a=-1,\ b=1,\ c=-2$
③ $a=1,\ b=1,\ c=2$
④ $a=-1,\ b=-1,\ c=-2$
⑤ $a=1,\ b=-1,\ c=-2$

해설

수치대입법을 이용한다.

$x=0$을 대입 $-2=-2a \quad \therefore\ a=1$

$x=1$을 대입 $-3=3b \quad \therefore\ b=-1$

$x=-2$를 대입 $12=6c \quad \therefore\ c=2$

3. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

4. $\dfrac{5}{1+2i} = x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y=-1$

해설

$$\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$$

$1-2i = x+yi$

$x=1, y=-2, x+y=-1$

5. $x = 3 + \sqrt{3}i$, $y = 3 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하면?

① 0　② 10　③ 20　④ -10　⑤ -20

해설

$x + y = 6, \quad xy = 12$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 6^3 - 3 \cdot 12 \cdot 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1-2i)z - i\bar{z} = 3-5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1+i$ ② $2+i$ ③ $2+2i$

④ $1-i$ ⑤ $2-i$

해설

$z = a+bi$ 라 하면 $\bar{z} = a-bi$ 이므로

$(1-2i)(a+bi) - i(a-bi) = a+bi-2ai+2b-ai-b$

$= (a+b)+(-3a+b)i = 3-5i$

따라서 $a+b=3$, $-3a+b=-5$ 이므로 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

따라서 $z=2+i$ 이다.

7. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,
양변에 x 를 곱하면
$x^2+1=tx$
$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로
$D=t^2-4\geq 0 \quad \therefore t^2\geq 4,\ t\leq -2$ 또는 $t\geq 2$

8. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -2(x+3)^2 + 4$
따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

9. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$

$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,

$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

10. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

제 1식에서 $(x-1)(x+1)(x+3)=0$

$\therefore\ \ x=1,\ -1,\ -3$

제 2식에서 $(x-1)(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ \ x=1,\ -1,\ -2$

제 3식에서 $(x-1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ 1,\ 2$

$\therefore$공통근 : $x=1$

11. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

12. 등식 $x^3+x-1=(x-a)(x-b)(x-c)$가 항등식일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 2 ② 5 ③ 3 ④ 7 ⑤ -7

해설

x^3+x-1

$=(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

$\therefore a+b+c=0,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\therefore a^3+b^3+c^3=3$

13. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값은?

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1, x=2$를 각각 대입하면
$x=-1$일 때,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots①$
$x=2$일 때, $(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots②$
①, ②를 연립하면

$$m=\frac{2}{3},\ n=-\frac{13}{3}$$

$\therefore\ m-n=5$

14. 다항식 $f(x)$를 $x+1$, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 3, -1이다. 이때, $f(x)$를 x^2+3x+2로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+5$ ② $-3x$ ③ $3x+6$

④ $4x+7$ ⑤ $5x+8$

해설

다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2, 즉 $(x+1)(x+2)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라고 하면

$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$로 놓을 수 있다.

문제의 조건에서 $f(-1)=3$, $f(-2)=-1$이므로

$f(-1)=-a+b=3$

$f(-2)=-2a+b=-1$

이것을 풀면 $a=4$, $b=7$

따라서, 구하는 나머지는 $4x+7$

15. x 에 관한 항등식 $x^3+2x^2-3x+5=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 를 만족시키는 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10 ② 10 ③ 50 ④ 100 ⑤ 200

해설

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

$=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$

$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$

따라서 x^3+2x^2-3x+5 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 $d,\ c,\ b$ 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$a=1,\ b=5,\ c=4,\ d=5$

$\therefore\ abcd=100$

16. 다음 중 $x(x+1)(x+2)(x+3)-24$의 인수인 것은?

① $(x-4)$ ② $(x+1)$ ③ (x^2-3x+6)

④ (x^2+3x+6) ⑤ (x^2-3x-6)

해설

$x(x+1)(x+2)(x+3)-24$

$=x(x+3)(x+1)(x+2)-24$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-24$

$x^2+3x=X$로 치환하면

$X(X+2)-24=X^2+2X-24$

$=(X+6)(X-4)$

$=(x^2+3x+6)(x^2+3x-4)$

$=(x^2+3x+6)(x-1)(x+4)$

17. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

18. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$

$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면

$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$

$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$

$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G = x-3$, $p = x+3$, $q = x-1$이다.

$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$

$\quad B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$

$\therefore\ a - b + c = 7$

19. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최소공배수가 x^3+6x^2-x-30이고, 최대공약수가 $x-2$일 때, 두 다항식의 합을 바르게 구한 것은?

① $2x^2+4x-16$ ② $2x^2+3x-8$ ③ x^2-5x-1

④ $2x^2+x+4$ ⑤ x^2+2x+5

해설

두 이차 다항식을 $A=a(x-2)$, $B=b(x-2)$ (a, b 는 서로소) 라고 하면

$L=x^3+6x^2-x-30=abG=ab(x-2)$ 이고,

L 을 인수분해하면

$L=(x-2)(x^2+8x+15)=$

$\underbrace{(x-2)}_{G}\underbrace{(x+3)(x+5)}_{ab}$

따라서, 두 다항식은

$(x-2)(x+3)=x^2+x-6$

$(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$ 이므로

두 다항식의 합은

$(x^2+x-6)+(x^2+3x-10)=2x^2+4x-16$

20. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+px+q=0$ 의 한 근이 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2-\sqrt{3}$ 이므로,

두 근은 $2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$

$p = -$(두근의 합) $= -4$

$q =$ (두근의 곱) $= 1$

$\therefore p+q = -3$

21. x에 관한 다음 이차방정식이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 또 음근의 절댓값이 양근 보다 크기 위한 m의 범위를 구하면?

$(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$

① $-2<m<0$　② $-3<m<0$　③ $-2<m<1$

④ $-2<m<2$　⑤ $-2<m<3$

해설

음근의 절댓값이 양근보다 크기 위한 조건은

$\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta<0$

$\alpha+\beta=\dfrac{4m}{m+3}<0$

$\therefore\ 4m(m+3)<0$

$\therefore\ -3<m<0\ \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=\dfrac{2m-1}{m+3}<0$

$\therefore\ (2m-1)(m+3)<0$

$\therefore\ -3<m<\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 동시에 만족하는 m의 범위는

$-3<m<0$

22. 이차함수 $y = ax^2 + bx + 6$ 이 $x = 1$ 일 때 최솟값 5 를 가진다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + 6 \\
&= a(x-1)^2 + 5 \\
&\quad (\because x = 1\text{일 때, 최솟값 5를 가진다.}) \\
&= a(x^2 - 2x + 1) + 5 \\
&= ax^2 - 2ax + a + 5
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a + 5 = 6,\ \ -2a = b$

$\therefore\ a = 1,\ b = -2$

$\therefore\ a + b = 1 + (-2) = -1$

23. 지면으로부터 초속 30m 로 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h = 30t - 5t^2$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 높이는?

① 60m ② 55m ③ 50m ④ 45m ⑤ 40m

해설

$$
\begin{aligned}
h &= 30t - 5t^2 \\
&= -5(t^2 - 6t + 9) + 45 \\
&= -5(t - 3)^2 + 45
\end{aligned}
$$

24. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=-1-3\cdot(-1)=2$

25. 두 다항식 $x^2 + 4x + 2k$ 와 $x^2 + 3x + k$ 의 최대공약수가 x 에 대한 일차식일 때, 상수 k 값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A = x^2 + 4x + 2k$, $B = x^2 + 3x + k$ 라고 하면 $A - B = x + k$
$A - B$ 는 최대공약수 G 를 인수로 갖고,
주어진 조건에서 두 식의 최대공약수가 일차식이므로
두 식의 최대공약수는 $x + k$ 이다.
A, B 는 최대공약수 $x + k$ 를 인수로 가지므로
A 에 $x = -k$ 를 대입하면
$k^2 - 2k = 0$, $k(k - 2) = 0$
$\therefore$ $k = 0$ 또는 $k = 2$
따라서, k 값들의 합은 2 이다.

26. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$인 a, b, c에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$의 값은?

① $2a$　② $2b$　③ $-2c$　④ $-2a$　⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \le 0,\ b \le 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0,\ c \ge 0$

$|a+b| > |c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

$\therefore\ a+b+c < 0$

$$\begin{aligned}\therefore(\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c\end{aligned}$$

27. 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\beta}$ ② $\frac{2}{\beta}$ ③ β ④ 2β ⑤ β^2

해설

$\beta^2 - \beta + 1 = 0$

$\alpha\beta = 1$에서 $\beta = \frac{1}{\alpha}$,

$\beta^2 = \frac{1}{\alpha^2}$

$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 1 + \beta + \beta^2 = 2\beta$

$(\because\ \beta^2 + 1 = \beta\ )$

해설

(별해1)

$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha}\ (\because\ \alpha^2 - \alpha + 1 = 0)$

$\alpha\beta = 1$에서 $\beta = \frac{1}{\alpha}$

$\therefore\ \frac{2}{\alpha} = 2\beta$

(별해2)

$x^2 - x + 1 = 0$의 근은 $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$라 하면

$\frac{2}{\alpha} = \frac{2}{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} = 1 - \sqrt{3}i = 2\beta$

28. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 의 그래프가 직선 $y = mx - 2$보다 위쪽에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $-6 < m < 2$　② $-4 < m < 1$　③ $-2 < m < 0$

④ $2 < m < 5$　⑤ $4 < m < 6$

해설

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2 - 2x + 2 > mx - 2$ 가 성립하므로
$x^2 - (m+2)x + 4 > 0$ 에서
이차방정식 $x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면
$D = (m+2)^2 - 16 < 0$
$(m+6)(m-2) < 0$
$\therefore -6 < m < 2$

29. 이차함수 $y=x^2-2ax+4a-4$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y=x^2-2ax+4a-4=(x-a)^2-a^2+4a-4$

이므로 $x=a$일 때 최솟값 $-a^2+4a-4$를 가진다.

$\therefore m=-a^2+4a-4=-(a-2)^2$

따라서 m은 $a=2$일 때 최댓값 0을 가진다.

30. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$이 $x = -1 + \sqrt{2}$를 한 근으로 가질 때, $2a - b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$에서 $x + 1 = \sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$

$\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$

$= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$

$\therefore\ 2 + c = 5,\ 4 + 2c = a,\ 10 - c = b$

$\therefore\ a = 10,\ b = 7,\ c = 3$

31. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 이라 할 때, $7z\bar{z}$ 의 값을 구하시오.
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 복소수 x, y 에 대하여 $\overline{\left(\dfrac{y}{x}\right)} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$ 이다.

$z = \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$ 에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 이므로

직접 α 를 대입하여 z 를 구하고 $\bar{z}$ 를 구해서 풀 수도 있지만
그렇게 하면 계산이 너무 어려워진다.
따라서 복소수의 켤레복소수의 성질을 이용하여 풀도록 시도해
보자.

주어진 문제에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$

이므로 $\bar{\alpha} = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 이다.

따라서, $\alpha + \bar{\alpha} = 1,\ \alpha\bar{\alpha} = \dfrac{3}{2}$ 이고

$z = \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1},\ \bar{z} = \dfrac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{(\alpha-1)(\bar{\alpha}-1)}{(\alpha+1)(\bar{\alpha}+1)} \\ &= \frac{\alpha\bar{\alpha} - (\alpha+\bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + (\alpha+\bar{\alpha}) + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2} - 1 + 1}{\frac{3}{2} + 1 + 1} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$\therefore\ 7z\bar{z} = 7 \times \dfrac{3}{7} = 3$

32. $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, y=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x^5+y^5=-1$	㉡ $x^9+y^9=-1$
㉢ $x^{11}+y^{11}=-1$	

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, y=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

각각 양변에 2을 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+x+1=0, y^2+y+1=0$

$x^2=-x-1 \cdots ①$

①의 양변에 x 를 곱하면

$x^3=-x^2-x=-(x^2+x)=1$ ($\because$ $x^2+x=-1$)

$x^3=1$, y 에 대해서도 마찬가지로 하면 $y^3=1$

또한 $x+y=-1, xy=1$

$$
\begin{aligned}
㉠ x^5+y^5 &= x^3\cdot x^2+y^3\cdot y^2 \\
&= x^2+y^2 \\
&= (x+y)^2-2xy \\
&= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
㉡ x^9+y^9 &= (x^3)^3+(y^3)^3 \\
&= 1+1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
㉢ x^{11}+y^{11} &= (x^3)^3\times x^2+(y^3)^3\times y^2 \\
&= x^2+y^2 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

※다음과 같은 과정으로 필요한 값을 얻을 수 있다.

$x^2+x+1=0, y^2+y+1=0$ 에서

각각 양변에 $x-1, y-1$ 을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0, (y-1)(y^2+y+1)=0$

$x^3-1=0, y^3-1=0$

$\therefore$ $x^3=y^3=1$

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용할 수도 있다.

x 와 y 를 X 에 대한 이차방정식의 두 근이라고 한다면 $x+y=-1$, $xy=1$ 이므로

$X^2+X+1=0 \Rightarrow X^3=1$ $\therefore$ $x^3=1$, $y^3=1$

33. x에 관한 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 해를 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,\ f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta,\ f(0)=-1$을 만족한다. 이 때 $ab+cd$의 값은?

① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

$x^2-x+1=0$의 두 근 : $\alpha,\ \beta,$

$\alpha+\beta=1\ ,\ \alpha\beta=1$

$f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,$

$f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$이므로

$f(x)-x=a(x-\alpha)(x-\beta)\left\{x-(\alpha+\beta)\right\}$

$f(0)=-1 \Rightarrow -1=-a\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\therefore a=1(\because \alpha\beta=1, \alpha+\beta=1)$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)+x$

$(\because\ \alpha+\beta=1)$

$f(x)=x^3-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)x-\alpha\beta$

$f(x)=x^3-2x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$a=1, b=-2, c=3, d=-1$

$\therefore\ ab+cd=-2-3=-5$