1. 다음의 윗줄은 자연수, 아랫줄은 정수이다. 이 도식이 의미하는 뜻과 가장 가까운 것은?

$$\begin{array}{lccccccc} \text{자연수;}\cdots, & 6, & 4, & 2, & 1, & 3, & 5, & 7.\ \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \text{정수;}\cdots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3,\ \cdots \end{array}$$

① 정수는 무한히 많다.

② 자연수는 무한히 많다.

③ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일함수가 존재할 수 없다.

④ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일대응이 존재한다.

⑤ 정수의 개수가 자연수의 개수보다 많다.

해설

문제의 대응은 자연수의 집합과
정수의 집합 사이에 서로 모자라는 것도 없고
남는 것도 없으며 2번씩 대응되는 것도 없는 대응,
즉 일대일 대응임을 알 수 있다.

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x-2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는$a > 0$　　② $-1 \le a \le 1$

③ $-2 < a < 2$　　④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \ge 1$

해설

(i) $x \ge 2$ 일 때$f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a+1)x + 1$
(ii) $x < 2$ 일 때$f(x) = ax - (x-2) + 3 = (a-1)x + 5$
함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.
따라서, $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로
$a < -1$ 또는 $a > 1$

3. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{f : x \rightarrow a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)}$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$　② $a \leq -1$　③ $a > -1$
④ $a < 1$　⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \geq 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,
$x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$
$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면
$x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.
즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$
$\therefore\ a < 1$

4. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x)=a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<-1$ ② $-1<a<1$ ③ $0<a<1$

④ $a<1$ ⑤ $a<-1,\ a>1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
$x\geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
$x<1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
$\therefore\ -2(a-1)>0$
$\therefore\ a<1$

5. $X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이므로
일대일 대응이 되려면
$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.
$\therefore\ a = 7$

6. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 $f(x) = |x-2| + kx - 5$의 역함수가 존재할 때, 상수 k의 범위는 무엇인가?

① $k < -1$
② $-1 < k < 1$
③ $k < 1$
④ $k < -1$ 또는 $k > 1$
⑤ $k > 1$

해설

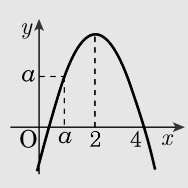
$x \geq 2$ 일 때, $f(x) = (k+1)x - 7$
$x < 2$ 일 때, $f(x) = (k-1)x - 3$
그런데 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다.
따라서, $(k+1)(k-1) > 0$ 이므로
$k < -1$ 또는 $k > 1$

7. 집합 $X = \{x \mid x \le a,\ x\text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \le 2$, $f(a) = a$

$-a^2 + 4a = a \qquad \therefore\ a = 0,\ 3$

a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0

8. $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

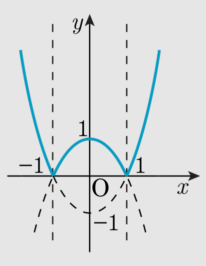
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1,\ x \geq 1$, $x^2 - 1 < 0$ 이면 $-1 < x < 1$

따라서, $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1(x \leq -1,\ x \geq 1) \\ 1 - x^2(-1 < x < 1) \end{cases}$



$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은

$\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$

또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 k 의 최솟값은 1이다.

9. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 X 에서 X 로의 함수 f 의 개수는?

(가) f 의 역함수가 존재한다. (나) $f(1) = f^{-1}(1)$

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

해설

함수 f 는 역함수를 가지므로 일대일 대응이어야 한다.

i) $f^{-1}(1) = f(1) = 1$ 일 때,
일대일 대응 $\{2,\ 3,\ 4\} \to \{2,\ 3,\ 4\}$ 의 개수는 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (개)

ii) $f^{-1}(1) = f(1) = 2$ 일 때,
$f(2) = 1$ 이므로 $\{3,\ 4\} \to \{3,\ 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

iii) $f^{-1}(1) = f(1) = 3$ 일 때,
$f(3) = 1$ 이므로 $\{2,\ 4\} \to \{2,\ 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

iv) $f^{-1}(1) = f(1) = 4$ 일 때,
$f(4) = 1$ 이므로 $\{2,\ 3\} \to \{2,\ 3\}$ 의 개수는
$2 \cdot 1 = 2$ (개)

따라서, 구하는 함수의 개수는 $6 + 2 + 2 + 2 = 12$

10. $A = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f(x) = x^2 - 2$ 가 역함수를 갖게 되는 실수 a 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 2　⑤ 3

해설

역함수를 가지려면 함수가 일대일 대응이 되어야 한다.
따라서 $f(x) \geq x$ 를 만족해야한다.
$\Rightarrow x^2 - 2 \geq x$
$\Rightarrow x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
$A = \{x \mid x \geq a\}$ 이므로 $a = 2$

11. $f(x) = \begin{cases} x(x \le 0) \\ x^2(x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$h(0) = g^{-1}(0) = k$
$g(k) = f(k+4) = 0$
$\therefore\ k+4=0$
$\therefore\ k=-4$
$\therefore\ h(0)=-4$

12. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 11

해설

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ $g^{-1}(2) = a$ 라고 하면

$g(a) = 2, 3a - 1 = 2$

$\therefore$ $a = 1$ 이므로 $(f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$

$\therefore$ $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $(\because 1 < 2)$

13. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 (x \geq 0) \\ x+1 (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5)+g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5)=a$ 라 하면 $f^{-1}(5)=a$ 에서 $f(a)=5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x)=x^2+1 \geq 1$ 이므로
$f(a)=a^2+1=5$
$\therefore a=2(\because a \geq 0) \therefore g(5)=2$
또, $g(0)=b$ 라 하면 $f^{-1}(0)=b$ 에서 $f(b)=0$
그런데 $x<0$ 일 때, $f(x)=x+1<1$ 이므로
$f(b)=b+1=0$
$\therefore b=-1 \therefore g(0)=-1$
$\therefore g(5)+g(0)=2-1=1$

14. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x\ge 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1}\circ f^{-1})(x)=1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x\ge 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에서

$(f^{-1}\circ f^{-1})(x)=(f\circ f)^{-1}(x)=1$

$(f\circ f)(1)=(f(f(1))=f(0)=-1$

$\therefore\ x=-1$

15. 실수 전체집합에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} -x^2 & (x < 0) \\ 2x & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, $g(-4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f^{-1}(x) = g(x)$
$g(-4) = f^{-1}(-4)$
$f^{-1}(-4) = a$ 이면 $f(a) = -4$ 이다.

$\begin{cases} -a^2 = -4(a < 0) \\ 2a = -4(a \geq 0) \end{cases}$

따라서 $a = -2$

16. 점 $(6, -2)$를 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$이므로 $(f \circ f)(x) = x$
$f(x) = a(x-6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$로 놓으면
$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
$\therefore a^2 x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$이므로
$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

17. 점 $(2,\ 1)$을 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$의 값은?

① -5　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x-2)+1 = mx-2m+1\ (m \neq 0)$ 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx-2m+1)-2m+1 = x$

$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$

즉, $m^2 = 1,\ -2m^2 - m + 1 = 0$이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x+3$이고

$f(-2) = -(-2)+3 = 5$ 이다.

18. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = x + 2$	㉡ $f(x) = -x - 1$
㉢ $f(x) = \frac{1}{x}$	㉣ $f(x) = 2x$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.
㉠ $(f \circ f)(x) = x + 4$
㉡ $(f \circ f)(x) = x$
㉢ $(f \circ f)(x) = x$
㉣ $(f \circ f)(x) = 4x$
따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.

19. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = -x + 7$	㉡ $f(x) = \frac{3}{2}x$
㉢ $f(x) = -\frac{2}{x}$	㉣ $f(x) = x - 1$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.

㉠ $(f \circ f)(x) = x$

㉡ $(f \circ f)(x) = \frac{9}{4}x$

㉢ $(f \circ f)(x) = x$

㉣ $(f \circ f)(x) = x - 2$

따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉠, ㉢이다.

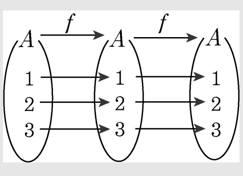
20. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 집합 A 에서 A 로의 함수 중 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

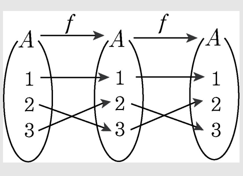
▷ 정답 : 4 개

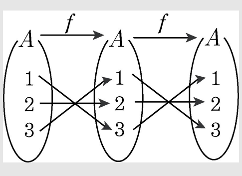
해설

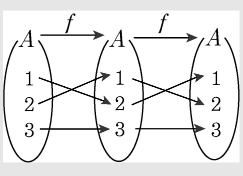
i) $f(x) = x$ 인 경우 1 개



ii) 1 개의 원소는 자기 자신에 대응되고, 나머지 2 개의 원소는 서로 엇갈려 대응되면 된다.
자기 자신에 대응되는 원소가 1, 2, 3 인 3 가지 경우가 있다.







i), ii) 에서 구하는 함수 f 의 개수는 $1 + 3 = 4$(개)