

1. 다음의 윗줄은 자연수, 아랫줄은 정수이다. 이 도식이 의미하는 뜻과 가장 가까운 것은?

자연수; $\dots, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, \dots$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$

정수; $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

- ① 정수는 무한히 많다.
- ② 자연수는 무한히 많다.
- ③ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일함수가 존재할 수 없다.
- ④ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일대응이 존재한다.
- ⑤ 정수의 개수가 자연수의 개수보다 많다.

해설

문제의 대응은 자연수의 집합과 정수의 집합 사이에 서로 모자라는 것도 없고 남는 것도 없으며 2번씩 대응되는 것도 없는 대응, 즉 일대일 대응임을 알 수 있다.

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x - 2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는 $a > 0$

② $-1 \leq a \leq 1$

③ $-2 < a < 2$

④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \geq 1$

해설

(i) $x \geq 2$ 일 때 $f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a + 1)x + 1$

(ii) $x < 2$ 일 때 $f(x) = ax - (x - 2) + 3 = (a - 1)x + 5$

함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.

따라서, $(a + 1)(a - 1) > 0$ 이므로

$a < -1$ 또는 $a > 1$

3. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f: x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a \quad (x \in R, a \in R)$$

함

수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $a \leq -1$

③ $a > -1$

④ $a < 1$

⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 에서 $x \geq 1$, $x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1) + (2-a)x + a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x) + (2-a)x + a$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면

$x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0$, $a-1 < 0$

$\therefore a < 1$

4. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.

$$\therefore -2(a-1) > 0$$

$$\therefore a < 1$$

5. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = |x - 2| + kx - 5$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 k 의 범위는 무엇인가?

① $k < -1$

② $-1 < k < 1$

③ $k < 1$

④ $k < -1$ 또는 $k > 1$

⑤ $k > 1$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $f(x) = (k + 1)x - 7$

$x < 2$ 일 때, $f(x) = (k - 1)x - 3$

그런데 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 $f(x)$ 는 일대일대응이다.

따라서, $(k + 1)(k - 1) > 0$ 이므로

$k < -1$ 또는 $k > 1$

7. 집합 $X = \{x \mid x \leq a, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

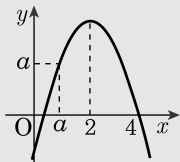
해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \leq 2$, $f(a) = a$

$$-a^2 + 4a = a \quad \therefore a = 0, 3$$

a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0



8. $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1, x \geq 1, x^2 - 1 < 0$
이면 $-1 < x < 1$

따라서, $f(x) = |x^2 - 1| =$

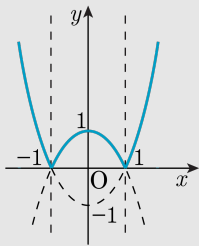
$$\begin{cases} x^2 - 1 (x \leq -1, x \geq 1) \\ 1 - x^2 (-1 < x < 1) \end{cases}$$

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로
함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은

$\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$

또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 k 의 최솟값은 1이다.



9. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 X 에서 X 로의 함수 f 의 개수는?

(가) f 의 역함수가 존재한다.

(나) $f(1) = f^{-1}(1)$

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

해설

함수 f 는 역함수를 가지므로 일대일 대응이어야 한다.

i) $f^{-1}(1) = f(1) = 1$ 일 때,

일대일 대응 $\{2, 3, 4\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$ 의 개수는 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (개)

ii) $f^{-1}(1) = f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = 1$ 이므로 $\{3, 4\} \rightarrow \{3, 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

iii) $f^{-1}(1) = f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = 1$ 이므로 $\{2, 4\} \rightarrow \{2, 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

iv) $f^{-1}(1) = f(1) = 4$ 일 때,

$f(4) = 1$ 이므로 $\{2, 3\} \rightarrow \{2, 3\}$ 의 개수는

$2 \cdot 1 = 2$ (개)

따라서, 구하는 함수의 개수는 $6 + 2 + 2 + 2 = 12$

10. $A = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f(x) = x^2 - 2$ 가 역함수를 갖게 되는 실수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

역함수를 가지려면 함수가 일대일 대응이 되어야 한다.

따라서 $f(x) \geq x$ 를 만족해야한다.

$$\Rightarrow x^2 - 2 \geq x$$

$$\Rightarrow x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$A = \{x \mid x \geq a\} \text{ 이므로 } a = 2$$

11. $f(x) = \begin{cases} x(x \leq 0) \\ x^2(x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$

라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$h(0) = g^{-1}(0) = k$$

$$g(k) = f(k+4) = 0$$

$$\therefore k+4 = 0$$

$$\therefore k = -4$$

$$\therefore h(0) = -4$$

12. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 3

③ 6

④ 8

⑤ 11

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}, g(x) = 3x - 1 \quad g^{-1}(2) = a \text{ 라고 하면}$$

$$g(a) = 2, 3a - 1 = 2$$

$$\therefore a = 1 \quad \therefore (f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$$

$$\therefore f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad (\because 1 < 2)$$

13. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$

그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로

$$f(a) = a^2 + 1 = 5$$

$$\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$$

또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$

그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로

$$f(b) = b + 1 = 0$$

$$\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$$

$$\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$$

14. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases} \text{ 에서}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$$

$$(f \circ f)(1) = (f(f(1))) = f(0) = -1$$

$$\therefore x = -1$$

15. 실수 전체집합에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} -x^2 & (x < 0) \\ 2x & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, $g(-4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$f^{-1}(x) = g(x)$$

$$g(-4) = f^{-1}(-4)$$

$f^{-1}(-4) = a$ 이면 $f(a) = -4$ 이다.

$$\begin{cases} -a^2 = -4(a < 0) \\ 2a = -4(a \geq 0) \end{cases}$$

따라서 $a = -2$

16. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f = f^{-1} \text{ 이므로 } (f \circ f)(x) = x$$

$$f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0) \text{ 로 놓으면}$$

$$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$$

$$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$$

$$\text{즉, } a^2 = 1, -6a^2 - 8a - 2 = 0 \text{ 이므로 } a = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = -x + 4 \text{ 이므로}$$

$$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$$

17. 점 (2, 1)을 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x - 2) + 1 = mx - 2m + 1$ ($m \neq 0$) 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$

$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$

즉, $m^2 = 1$, $-2m^2 - m + 1 = 0$ 이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x + 3$ 이고

$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$ 이다.

18. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = x + 2$

㉡ $f(x) = -x - 1$

㉢ $f(x) = \frac{1}{x}$

㉣ $f(x) = 2x$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.

㉠ $(f \circ f)(x) = x + 4$

㉡ $(f \circ f)(x) = x$

㉢ $(f \circ f)(x) = x$

㉣ $(f \circ f)(x) = 4x$

따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.

19. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = -x + 7$

㉡ $f(x) = \frac{3}{2}x$

㉢ $f(x) = -\frac{2}{x}$

㉣ $f(x) = x - 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.

㉠ $(f \circ f)(x) = x$

㉡ $(f \circ f)(x) = \frac{9}{4}x$

㉢ $(f \circ f)(x) = x$

㉣ $(f \circ f)(x) = x - 2$

따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉠, ㉢이다.

20. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 집합 A 에서 A 로의 함수 중 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하여라.

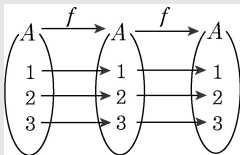
▶ 답 :

개

▶ 정답 : 4개

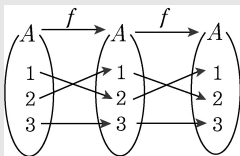
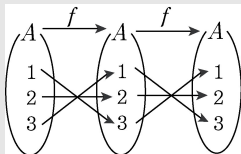
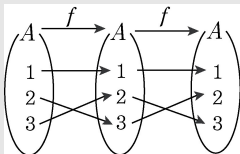
해설

i) $f(x) = x$ 인 경우 1개



ii) 1개의 원소는 자기 자신에 대응되고, 나머지 2개의 원소는 서로 엇갈려 대응되면 된다.

자기 자신에 대응되는 원소가 1, 2, 3인 3가지 경우가 있다.



i), ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는 $1 + 3 = 4(\text{개})$