**1.** 두 집합 $X = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid a \le y \le b\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \to X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0,\ a)$, $(2,\ b)$를 지나야 한다.

$a = f(0) = -1$, $b = f(2) = 5$

$\therefore\ a + b = 4$

**2.** 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에서 $X$로의 일대일대응 중에서 $f(x) \neq x$를 만족시킬 때, $f(2) + f^{-1}(2)$의 값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

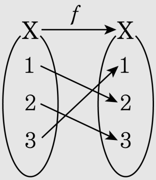
$f(x) \neq x$ 이므로 $f(1) = 2$ 또는 $f(1) = 3$이다.

( i ) $f(1) = 2$ 이면

$f(3) \neq 3$ 이므로

$f(3) = 1,\ f(2) = 3$

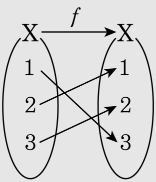
$\therefore\ f(2) + f^{-1}(2) = 3 + 1 = 4$




( ii ) $f(1) = 3$이면 $f(2) \neq 2$ 이므로

$f(2) = 1,\ f(3) = 2$

$\therefore\ f(2) + f^{-1}(2) = 1 + 3 = 4$




( i ) , ( ii ) 에서

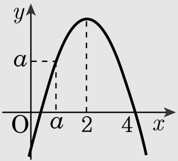
$f(2) + f^{-1}(2) = 4$

**3.** 집합 $\mathrm{X} = \{x \mid x \le a,\ x\text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, $a$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.




정의역, 공역은 모두 $a$ 이하이고 $a \le 2$ , $f(a) = a$

$-a^2 + 4a = a \qquad \therefore\ a = 0,\ 3$

$a$ 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0

**4.** 두 집합 $X = \{x \mid 1 \le x \le 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \le y \le 3\}$ 에 대하여 $X$ 에서 $Y$ 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 $a$, $b$ 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$ )

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 $f$ 는 일대일대응이다.
함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로
$f(1) = 1,\ f(5) = 3$
$f(1) = 1$ 에서 $a + b = 1 \cdots$ ㉠
$f(5) = 3$ 에서 $5a + b = 3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

**5.** $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 $k$ 의 최솟값을 구하여라.

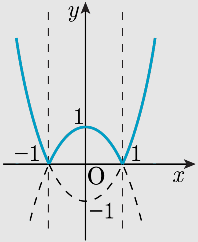
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1,\ x \geq 1$, $x^2 - 1 < 0$ 이면 $-1 < x < 1$

따라서, $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 (x \leq -1,\ x \geq 1) \\ 1 - x^2 (-1 < x < 1) \end{cases}$




$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은 $\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$ 또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 $k$ 의 최솟값은 1이다.

**6.** 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A, B$ 에 대하여 $A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 일 때, 함수 $f : A \to B$ 가 역함수를 가지는 함수 $f$ 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

함수 $f : A \Rightarrow B$ 가 역함수를 가지므로
함수 $f$ 는 일대일 대응이다.
$A \cup B = S$, $A \cap B = \{5\}$ 을 만족하고
함수 $f$ 가 일대일 대응이므로
두 집합 $A, B$ 는 각각 5 를 원소로 가지면서
$1, 2, 3, 4$ 중에서 서로 다른 두 개씩을 나누어 가진다.
예를 들어 $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 일 때와 같이 나누는 방법의 수는 6 가지이다.
한편 6 가지 각각의 경우에 일대일 대응인 함수의 개수는 모두 6 개씩 만들 수 있으므로
구하는 함수의 개수는 $6 \times 6 = 36$

**7.** 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 $X$ 에서 $X$ 로의 함수 $f$ 의 개수는?

| |
|---|
| (가) $f$ 의 역함수가 존재한다.<br>(나) $f(1) = f^{-1}(1)$ |

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

**해설**

함수 $f$ 는 역함수를 가지므로 일대일 대응이어야 한다.

i ) $f^{-1}(1) = f(1) = 1$ 일 때,
일대일 대응 $\{2,\ 3,\ 4\} \to \{2,\ 3,\ 4\}$ 의 개수는 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (개)

ii ) $f^{-1}(1) = f(1) = 2$ 일 때,
$f(2) = 1$ 이므로 $\{3,\ 4\} \to \{3,\ 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

iii) $f^{-1}(1) = f(1) = 3$ 일 때,
$f(3) = 1$ 이므로 $\{2,\ 4\} \to \{2,\ 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

iv ) $f^{-1}(1) = f(1) = 4$ 일 때,
$f(4) = 1$ 이므로 $\{2,\ 3\} \to \{2,\ 3\}$ 의 개수는
$2 \cdot 1 = 2$ (개)

따라서, 구하는 함수의 개수는 $6 + 2 + 2 + 2 = 12$

**8.** $A = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 $A$ 에서 $A$ 로의 함수 $f(x) = x^2 - 2$ 가 역함수를 갖게 되는 실수 $a$ 의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $2$ ⑤ $3$

해설

역함수를 가지려면 함수가 일대일 대응이 되어야 한다.
따라서 $f(x) \geq x$ 를 만족해야한다.
$\Rightarrow x^2 - 2 \geq x$
$\Rightarrow x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
$A = \{x \mid x \geq a\}$ 이므로 $a = 2$

**9.** 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 $a$ 의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $3$

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 $f$ 를 합성하면

$f^{-1} \circ f = f \circ f$

이때, $f^{-1} \circ f = I(I$는항등함수$)$ 이므로 $f \circ f = I$

즉 $(f \circ f)(x) = x$

$\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3)$

$= a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x$

따라서 $a^2 = 1,\ 3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$

**10.** 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 $k$ 의 값은? (단, $f^{-1}$ 는 $f$ 의 역함수)

① 4 ② 3 ③ 2 ④ $-1$ ⑤ $-2$

해설

$f^{-1}$ 이므로 $f \circ f = \mathrm{I}$

$(f \circ f)(x) = x$ 에서

$f(f(x)) = f(kx+1) = k(kx+1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$

$\therefore\ k^2 = 1,\ k + 1 = 0$ 따라서 $k = -1$

**11.** 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5)=-2$, $(f\circ f)(x)=x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① $-5$ ② $-2$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $5$

해설

$(f\circ f)(x)=x$ 에서 $f=f^{-1}$

따라서 $f^{-1}(5)=f(5)=-2$

**12.** 점 $(6,-2)$ 를 지나는 일차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f=f^{-1}$ 이므로 $(f\circ f)(x)=x$

$f(x)=a(x-6)-2=ax-6a-2(a\neq 0)$ 로 놓으면

$f(f(x))=a(ax-6a-2)-6a-2=x$

$\therefore a^2x-6a^2-8a-2=x$

즉, $a^2=1$, $-6a^2-8a-2=0$ 이므로 $a=-1$

따라서 $f(x)=-x+4$ 이므로

$f(-1)=-(-1)+4=5$

**13.** 점 $(2,\ 1)$을 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$의 값은?

① $-5$　② $-2$　③ $0$　④ $2$　⑤ $5$

해설

$f = f^{-1}$이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x-2)+1 = mx-2m+1 \ (m \neq 0)$ 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx-2m+1)-2m+1 = x$

$\therefore m^2x-2m^2-m+1 = x$

즉, $m^2 = 1,\ -2m^2-m+1 = 0$이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x+3$이고

$f(-2) = -(-2)+3 = 5$ 이다.

**14.** 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

| | |
|---|---|
| ㉠ $f(x) = x + 2$ | ㉡ $f(x) = -x - 1$ |
| ㉢ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | ㉣ $f(x) = 2x$ |

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.

㉠ $(f \circ f)(x) = x + 4$

㉡ $(f \circ f)(x) = x$

㉢ $(f \circ f)(x) = x$

㉣ $(f \circ f)(x) = 4x$

따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.

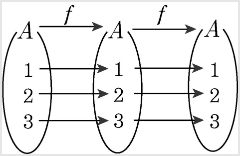
**15.** 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 집합 $A$ 에서 $A$ 로의 함수 중 $f=f^{-1}$ 를 만족시키는 함수 $f$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

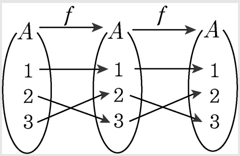
▷ 정답 : 4 개

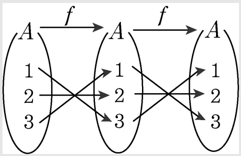
해설

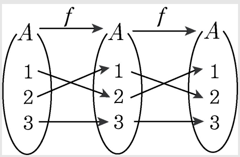
i) $f(x)=x$ 인 경우 1 개



ii) 1 개의 원소는 자기 자신에 대응되고, 나머지 2 개의 원소는 서로 엇갈려 대응되면 된다.
자기 자신에 대응되는 원소가 1, 2, 3 인 3 가지 경우가 있다.







i), ii) 에서 구하는 함수 $f$ 의 개수는 $1+3=4$(개)