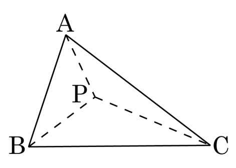
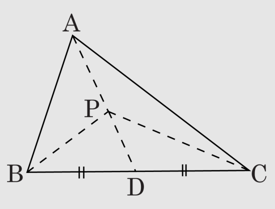
1. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$의 내부에 넓이가 삼등분이 되도록 점 P를 잡았더니 $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 3$, $\overline{CP} = 5$가 되었다고 한다. 이때, 선분 BC 의 길이는?



① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle ABC$의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다.
따라서 $\overline{AP}$의 연장선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라 하면



$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$

$\therefore\ \overline{PD} = 2$

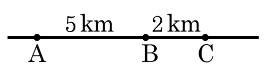
$\triangle PBC$에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\left(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$3^2 + 5^2 = 2\left(2^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13},\ \overline{BC} = 2\cdot\overline{BD} = 2\sqrt{13}$$

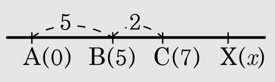
2. 직선 도로가 통과하는 세 마을 A, B, C가 있다. 마을 A와 마을 B사이의 거리는 5 km, 마을 B와 마을 C사이의 거리는 2 km이다. 이 도로 위에 마을 X가 있는데, 마을 X와 마을 A사이의 거리는 마을 X와 마을 C사이의 거리의 2배이다. 마을 X와 마을 B사이의 거리는? (단, 마을 X는 마을 A와 B사이에 있다.)



① $\frac{1}{5}$ km　② $\frac{1}{4}$ km　③ $\frac{1}{3}$ km　④ $\frac{1}{2}$ km　⑤ 1 km

해설

다음 그림과 같이 직선도로를 수직선, 마을 A를 원점으로 하면



A(0), B(5), C(7)이다. 이 때 X(x)

A와 X사이의 거리는 C와 X사이의 거리의 2배이므로

$|x-0| = 2|x-7|$, $|x| = 2|x-7|$

$\therefore\ 2(x-7) = \pm x$

$\therefore\ x = \frac{14}{3}$ 또는 $x = 14$

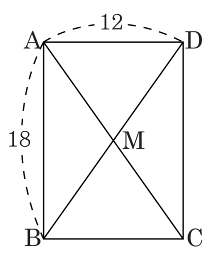
그런데 마을 X는 마을 A와 B사이에 있으므로

$x = \frac{14}{3}$이다.

따라서 X와 B사이의 거리는

$5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}$(km)이다.

3. 다음 그림의 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB} = 18$, $\overline{AD} = 12$이고, 두 대각선의 교점은 M이다. 삼각형 ABD의 무게중심을 G, 삼각형 CDM의 무게중심을 H라 할 때, 두 점 G와 H사이의 거리는?



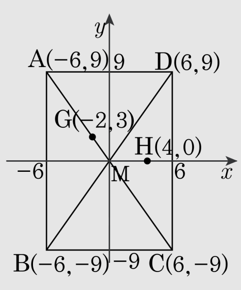
① $2\sqrt{5}$　② $3\sqrt{5}$　③ $4\sqrt{5}$
④ $5\sqrt{5}$　⑤ $6\sqrt{5}$

해설

그림과 같이 좌표를 정하면

$G\left(\dfrac{-6+6-6}{3}, \dfrac{9+9-9}{3}\right)$

$H\left(\dfrac{6+0+6}{3}, \dfrac{9+0-9}{3}\right)$



그러므로 $\overline{GH} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$

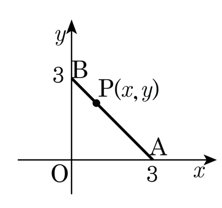
4. 세 점 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 3)$과 점 $P(x, y)$가 있다. $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$의 최솟값과 그 때의 점 P의 좌표는?

① 30, $P(0, 1)$　② 30, $P(0, 2)$　③ 38, $P(0, 1)$
④ 34, $P(0, 2)$　⑤ 38, $P(0, 2)$

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$
$= (x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-3)^2$
$= 3x^2 + 3y^2 - 6y + 41$
$= 3x^2 + 3(y-1)^2 + 38$
따라서 최솟값 38, $P(0, 1)$

5. $b \ge a > 0,\ c \ge 0$ 이면 $\dfrac{a+c}{b+c} \ge \dfrac{a}{b}$ 가 성립한다. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 A(3, 0), B(0, 3) 에 대하여 점 P($x,\ y$) 가 선분 AB 위를 움직일 때, $\dfrac{5-y}{5+x} \times \dfrac{5-x}{5+y}$ 의 최솟값은?



① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{4}{5}$

해설

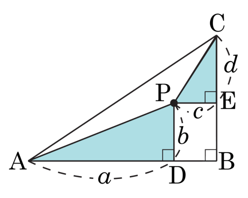
직선 AB 의 방정식은
$y = -x + 3$ 이므로 $x + y = 3$

$$\therefore\ \frac{5-y}{5+x} \times \frac{5-x}{5+y} = \frac{25-5(x+y)+xy}{25+5(x+y)+xy}$$
$$= \frac{10+xy}{40+xy} \ge \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$
$$(\because\ xy \ge 0)$$

(단, 등호는 $xy = 0$ 일 때,
점 P가 A 또는 B일 때 성립한다.)

따라서, 구하는 최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이다.

6. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 가 있다. 삼각형의 내부에 한 점 P 를 잡고, 점 P 에서 선분 AB, BC 에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라 한다. $\overline{AD} = a$, $\overline{DP} = b$, $\overline{PE} = c$, $\overline{EC} = d$ 라 할 때, 옳은 내용을 <보기> 에서 모두 고른 것은?



보기

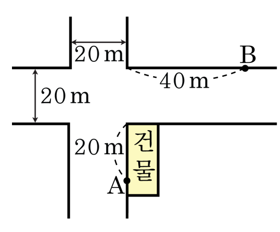
㉠ $\dfrac{b}{a} < \dfrac{d}{c}$ ㉡ $\dfrac{b}{a} < \dfrac{b+d}{a+c}$ ㉢ $\dfrac{b+d}{a+c} < \dfrac{d}{c}$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

선분 AP 의 기울기는 $\dfrac{b}{a}$,
선분 PC 의 기울기는 $\dfrac{d}{c}$,
선분 AC 의 기울기는 $\dfrac{b+d}{a+c}$ 이므로
$\dfrac{b}{a} < \dfrac{b+d}{a+c} < \dfrac{d}{c}$ 가 성립한다.
따라서 옳은 내용은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

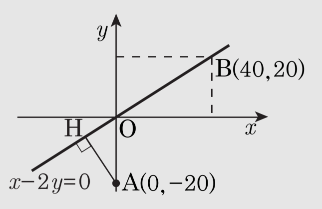
7. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)



① $2\sqrt{10}$ ② $4\sqrt{10}$ ③ $6\sqrt{5}$

④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

해설



그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는
좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는
각각(0,−20), (40, 20) 이다. 이때, 원점과
점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x-2y=0$
이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할
최소거리는 점 A 와 직선 $x-2y=0$

사이의 거리이다. $\therefore\ \overline{AH}=\dfrac{|1\cdot 0-2\cdot(-20)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=8\sqrt{5}$

8. 직선 $y = m_1 x$ 의 기울기 m_1 은 0이 아닌 유리수이다. 이 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 이등분한 직선을 $y = m_2 x$ 라 한다. m_2 가 유리수일 때, 다음 중 m_1 의 값이 될 수 있는 것은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$y = m_1 x$와 x축의 이등분선이므로
$y = m_2 x$ 위의 점에서 $y = m_1 x$ 와 x 축에 이르는 길이는 같다.
$\Rightarrow$ $y = m_2 x$ 위의 점을 $(\alpha, m_2\alpha)$ 라 하면,

$$\frac{|\alpha m_1 - m_2\alpha|}{\sqrt{m_1^2 + 1}} = |m_2\alpha|$$

$\Rightarrow \quad m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2 = m_2^2m_1^2 + m_2^2$

$\Rightarrow \quad (m_2^2 - 1)m_1^2 + 2m_1m_2 = 0$

$\Rightarrow \quad (m_2^2 - 1)m_1 + 2m_2 = 0(\because m_1 \neq 0)$

$\Rightarrow \quad m_1m_2^2 + 2m_2 - m_1 = 0$

$\Rightarrow \quad m_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + m_1^2}}{m_1}$

여기에서 m_2 가 유리수가 되기 위해서는 근호 안 $1 + m_1^2$ 의 값이 완전제곱수가 되어야 한다.

주어진 값 중 이 조건을 만족하는 것은 $m_1 = \frac{5}{12}$ 뿐이다.

9. 유리수 전체의 집합을 Q라 하고 자연수 n에 대하여 집합 $A_n = \{x | x \in Q, < x > -x = \frac{1}{n}\}$이라 할 때, 다음 중 참인 것은? (단, $< x >$는 x보다 큰 수 중 최소인 정수이다.)

① $A_1 = \varnothing$ ② $A_4 \subset A_2$ ③ $n(A_3) = 2$
④ $-\frac{5}{3} \in A_3$ ⑤ $A_2 \cap A_4 = \varnothing$

해설

$A_1 :< x > -x = 1 \Rightarrow x =$ 정수
$\therefore A_1 = \{\cdots -1, 0, 1 \cdots\}$
$A_2 :< x > -x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = n - \frac{1}{2}$($n =$ 정수)
$\therefore A_2 = \left\{\cdots -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdots\right\}$
$A_3 :< x > -x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = n - \frac{1}{3}$($n =$ 정수)
$\therefore A_3 = \left\{\cdots -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \cdots\right\}$
$A_4 :< x > -x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = n - \frac{1}{4}$($n =$ 정수)
$\therefore A_4 = \left\{\cdots -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \cdots\right\}$
㉠ $A_1 \neq \varnothing$
㉡ $A_4 \not\subset A_2$
㉢ A_3 은 무한집합이므로 $n(A_3) \neq 2$
㉣ $-\frac{5}{3} \notin A_3$
㉤ $A_2 \cap A_4 = \varnothing$

10. 집합 $S=\{\varnothing,\ 0,\ 1,\ \{1,\ 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $0 \in S$　　② $\{0,\ 2\} \not\subset S$　　③ $\varnothing \subset S$

④ $\{1,\ 2\} \in S$　　⑤ $\{\varnothing\} \in S$

해설

집합 S 의 원소는 $\varnothing, 0, 1, \{1,2\}$ 이다.
① $0 \in S \to 0$ 은 집합 S 의 원소이므로 옳다.
② $\{0,2\} \not\subset S \to 2$는 집합 S 의 원소가 아니므로 0 과 2 로 이루어진 집합은 S 의 부분집합이 될 수 없다. 따라서 $\{0,2\} \not\subset S$ 는 옳다.
③ $\varnothing \subset S \to \varnothing$ 는 집합 S 의 원소이지만 공집합$(\varnothing)$는 모든 집합의 부분집합이므로 옳다.
④ $\{1,2\} \in S \to \{1,2\}$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
⑤ $\{\varnothing\} \in S \to \{\varnothing\}$ 은 집합 S 의 원소가 아니므로 옳지 않다.

11. 다음 두 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 24\text{의 약수}\}$, $B = \{1,\ 3,\ 8,\ a \times 3,\ 2,\ b+3,\ c,\ 12\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 일 때, 자연수 a 가 될 수 있는 최댓값과 최솟값의 차이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$,
$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 8,\ 12,\ a \times 3,\ b+3,\ c\}$ 이므로,
$a \times 3,\ b+3,\ c$ 는 각각 $4,\ 6,\ 24$ 중 하나여야 한다.
$a \times 3 = 4$ 일 때 a 값이 최소가 되고, $a \times 3 = 24$ 일 때 a 값이 최대가 되지만, $a \times 3 = 4$ 일 때의 a 값은 자연수가 아니므로 부적합하다.
따라서 a 값이 최소일 때는 $a \times 3 = 6$ 일 때이다.
최댓값 : $a = 8$
최솟값 : $a = 2$
따라서 $8 - 2 = 6$

12. $n(A)=3$ 인 집합 A 에 대하여 집합 $P=\{X|X \subset A\}$ 일 때, 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 255 개

해설

집합 P 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 가지므로
$n(P)=2^3=8$,
따라서 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수는
$2^8-1=255$ (개)

13. 전체집합 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,5\}$ 에 대하여 $A \cap X = B \cap X$ 를 만족시키는 U 의 부분집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$1 \in X$ 이면 $1 \in (A \cap X)$, $1 \notin (B \cap X)$, $5 \in X$ 이면 $5 \notin (A \cap X)$, $5 \in (B \cap X)$ 이므로 $A \cap X \neq B \cap X$ 이다. 따라서 U 의 원소 중 1과 5는 집합 X 의 원소가 될 수 없고, 나머지 다른 원소들은 X 의 원소가 되거나 되지 않아도 주어진 조건은 성립한다. 즉, 집합 X 는 1과 5를 포함하지 않는 U 의 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore$ X 의 개수는 $2^4 = 16$(개) 이다.

14. 두 집합 $A = \{2,\ 1,\ a+3,\ b\}$, $B = \{4,\ a,\ b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

(ⅰ) $a+3=4$ 일 때, $a=1$

$A = \{2,\ 1,\ 4,\ b\}$

$B = \{4,\ 1,\ b+1\}$

$b+1=2,\ b=1(\times)$

(ⅱ) $b=4$ 일 때,

$A = \{2,\ 1,\ a+3,\ 4\}$

$B = \{4,\ a,\ 5\}$

$a+3=5,\quad a=2(\bigcirc)$

$\therefore\ a+b=2+4=6$

15. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A = \left\{x | 0 < x \leq 10\text{인 홀수}\right\}$, $B = \left\{x | x\text{는 두 자리의 소수}\right\}$, $C = \left\{x | x\text{는 } 3\text{의 배수}\right\}$ 에 대하여 $A - \left\{(A^c \cup B^c \cup C) \cap (A^c \cup B \cup C)\right\}$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,
$B = \{11, 13, 17, 19, 23, \cdots, 97\}$,
$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \cdots\}$,

$$
\begin{aligned}
& A - \left\{(A^c \cup B^c \cup C) \cap (A^c \cup B \cup C)\right\} \\
&= A - \left\{(A^c \cup C) \cup (B^c \cap B)\right\} \\
&= A - (A^c \cup C) = A \cap (A^c \cup C)^c \\
&= A \cap (A \cap C^c) = (A \cap C^c) \\
&= A - C \\
&= \{1, 5, 7\}
\end{aligned}
$$

16. 두 집합 P, Q 에 대하여 $(P-Q)\cup(Q-P)$ 의 가장 작은 원소가 P 의 원소이면 $P<Q$, Q 의 원소이면 $P>Q$ 라고 정의한다. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,3,4,5\}$, $C=\{2,4,6,8\}$ 에 대하여 $A<B$, $B<C$ 를 만족하기 위한 자연수 a 를 모두 구하여라. (단, $n(B)=4$ 이다.)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

1) $a=1$일 때
$(A-B)\cup(B-A)=\{2,5\}$이므로 $A<B$,
$(B-C)\cup(C-B)=\{1,2,3,5,6,8\}$이므로 $B<C$

2) $a=2$일 때
$(A-B)\cup(B-A)=\{1,5\}$ 이므로 $A<B$,
$(B-C)\cup(C-B)=\{3,5,6,8\}$ 이므로 $B<C$

3) $a\geq 6$일 경우
$(A-B)\cup(B-A)=\{1,2,5,a\}$이므로 a의 값에 관계없이 $A<B$, $(B-C)\cup(C-B)=\{2,3,5,6,a,8\}$ 또는 $\{2,3,5,6\}$ 또는 $\{2,3,5,8\}$이므로 a의 값에 관계없이 $B<C$

따라서 a는 1 또는 2이다.

17. 자연수 k 에 대하여 집합 $A_k = \{x | k < x \leq 20k$인 자연수$\}$ 일 때, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_{10})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A_1 = \{2, 3, \cdots, 20\}$
$A_2 = \{3, 4, \cdots, 40\}$
$A_3 = \{4, 5, \cdots, 60\}$
$\vdots$
$A_{10} = \{11, 12, 13, \cdots, 200\}$
$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10} = \{11, 12, \cdots, 20\}$
$\therefore n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10}) = 10$

18. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이나 충분조건은 <u>아닌</u> 것을 고르면? (단, n 은 자연수, $x,\ y,\ z$ 는 실수)

① $p : A \cup B = A,\ q : B - A = \phi$

② $p : n^2$ 은 12 의 배수이다., $q : n$ 은 12 의 배수이다.

③ $p : xyz \neq 0,\ q : x,\ y,\ z$ 는 모두 0 이 아니다.

④ $p : x^2 + y^2 + z^2 = 0,\ q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$

⑤ $p : |x + y + z| = |x| + |y| + |z|,\ q : xy + yz + zx > 0$

해설

① $p : A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow q : B - A = \phi$ ∴ 필요충분조건

② $p : n^2$ 은 12의 배수이다. $\leftarrow q : n$ 은 12 의 배수이다.<반례> n 이 6 이면 n^2 은 12 의 배수이나 n 은 12 의 배수가 아니다. ∴ 필요조건

③ $p : xyz \neq 0 \ \rightarrow \ q : x,\ y,\ z$ 는 모두 0 이 아니다. ∴ 필요충분조건

④ $p : x^2+y^2+z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0,\ z = 0$ $q : x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} = 0 \Leftrightarrow \ x = y = z$

$p :\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \ \Rightarrow q :\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ ∴ 충분조건

⑤ $|x + y + z| = |x| + |y| + |z| \Rightarrow xy + yz + zx\ 0$ <반례> $x = 3,\ y = 5,\ z = -1$ 을 대입하면 $q \rightarrow p$ 가 성립하지 않는다.∴ 충분조건

19. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ a^2=b^2+c^2,\ b+c\le ka$ 를 만족하는 양의 상수 k의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

해설

$b+c\le ka$에서 $b+c>0$이므로
$(b+c)^2\le k^2a^2,\quad (b+c)^2\le k^2(b^2+c^2)$
그러므로 $(k^2-1)b^2-2bc+(k^2-1)c^2\ge 0$
이 임의의 양수 $b,\ c$에 대하여 성립할 조건은
$k^2-1>0,\quad D/4=c^2-(k^2-1)^2c^2\le 0$
두 식에서 $k>0$이므로 $k\ge\sqrt{2}$
따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

20. 임의의 양수 $a,\ b$에 대하여 부등식 $(a+b)^3 \le k(a^3+b^3)$ 이 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하시오.

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 6

해설

$(a+b)^3 \le k(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 이므로

$$\begin{aligned} k &\ge \frac{(a+b)^2}{a^2-ab+b^2} \\ &= \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2-3ab} \\ &= \frac{1}{1-3\times\dfrac{ab}{(a+b)^2}} \cdots ① \end{aligned}$$

그런데 $a>0,\ b>0$ 이므로 $a+b \ge 2\sqrt{ab}$

$\therefore\ (a+b)^2 \ge 4ab$

$\therefore\ \dfrac{ab}{(a+b)^2} \le \dfrac{1}{4} \cdots$ ②

②를 ①에 대입하면

$$k \ge \frac{1}{1-3\times\dfrac{1}{4}} = 4$$

$\therefore\ k$의 최솟값은 4