

1. 점 A(-2, 6)와 점 B(4,4), 그리고 평면 위의 두 점 P, Q에 대하여 AP의 중점이 B, AQ의 중점이 P일 때, 점 Q는 AB를 몇 대 몇으로 외분하는 점인가?

- ① 4:3 ② 3:4 ③ 2:3 ④ 3:2 ⑤ 1:3

해설

P(x, y) 라 하면 $\frac{-2+x}{2} = 4, \frac{6+y}{2} = 4$ 에서
 $x = 10, y = 2, \therefore P(10, 2)$

Q(α, β) 라 하면 $\frac{-2+\alpha}{2} = 10, \frac{6+\beta}{2} = 2$ 에서
 $\alpha = 22, \beta = -2$

$\therefore Q(22, -2)$

그리고 점 Q가 선분 AB를 $m:n$ (단, $m > 0, n > 0, m \neq n$)

으로 외분한다고 가정하면

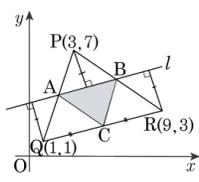
$$\frac{4m+2n}{m-n} = 22 \dots \text{①}$$

$$\frac{4m-6n}{m-n} = -2 \dots \text{②}$$

①, ②에서 $3m = 4n \therefore m:n = 4:3$

그러므로 점 Q는 선분 AB를 4:3으로 외분한다.

2. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $P(3,7)$, $Q(1,1)$, $R(9,3)$ 으로부터 같은 거리에 있는 직선 l 이 선분 PQ , PR 과 만나는 점을 각각 A , B 라 하자. 선분 QR 의 중점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표를 $G(x, y)$ 라 하면 $x+y$ 의 값은?



- ① $\frac{16}{3}$ ② 6 ③ $\frac{20}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 8

해설

세 점 P, Q, R 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 P', Q', R' 라 하면 $\triangle PAP' \equiv \triangle QAQ'$ (\because ASA 합동) 이므로

점 A 는 선분 PQ 의 중점이다.

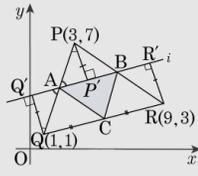
마찬가지로 점 B 는 선분 PR 의 중점이다.

따라서, 세 점 A, B, C 는 각각 선분 PQ , 선분 PR , 선분 QR 의 중점이므로 $\triangle ABC$ 의 무게중심은 $\triangle PQR$ 의 무게중심과 일치한다.

$\triangle ABC$ 의 무게중심을 $G(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{3+1+9}{3} = \frac{13}{3}, y = \frac{7+1+3}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\text{따라서, } x+y = \frac{13}{3} + \frac{11}{3} = 8$$



3. 정점 A(1, 4)와 직선 $x + 2y - 1 = 0$ 위의 동점 P를 연결하는 선분 AP를 2:1로 내분하는 점의 자취의 방정식을 구하면?

① $x + 2y - 5 = 0$

② $2x + 3y - 10 = 0$

③ $3x + 6y - 11 = 0$

④ $3x - 6y - 10 = 0$

⑤ $2x + 5y - 9 = 0$

해설

P의 좌표를 (a, b) 라 하면 $a + 2b - 1 = 0 \dots\dots ①$

\overline{AP} 를 2:1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{2a+1}{3}, y = \frac{2b+4}{3}$$

$$\therefore a = \frac{3x-1}{2}, b = \frac{3y-4}{2} \dots\dots ②$$

$$②\text{을 } ①\text{에 대입하면 } \frac{3x-1}{2} + 2 \times \frac{3y-4}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore 3x + 6y - 11 = 0$$

4. 평면 위의 세 점 A(-1, 2), B(4, 6), C(0, 1)과 임의의 점 P가 있을 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 을 최소화하는 점 P의 좌표는 (a, b) 이고, 그 때의 최솟값은 k 이다. 이 때 $ab - k$ 의 값을 구하면?

- ① -25 ② -20 ③ -15 ④ -10 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (a+1)^2 + (b-2)^2 + (a-4)^2 + (b-6)^2 + a^2 + (b-1)^2 \\ &= 3a^2 - 6a + 3b^2 - 18b + 58 \\ &= 3(a^2 - 2a + 1) + 3(b^2 - 6b + 9) - 3 - 27 + 58 \\ &= 3(a-1)^2 + 3(b-3)^2 + 28 \\ \therefore & a = 1, b = 3 \text{ 일 때, 최솟값은 } 28 \\ \therefore & ab - k = -25 \end{aligned}$$

5. 점 (2, 3) 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A(a, 0), B(0, b)라 하자. 이 때, 삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값은?(단, O 는 원점이고 a, b 는 양수이다.)

- ① 8 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

x 절편, y 절편이 각각 (a, 0), (0, b) 이므로

직선의 방정식은 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이다.

이 때, 점(2, 3) 을 지나므로

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{a} \times \frac{3}{b}}$$

($\therefore a, b > 0$ 산술기하평균)

따라서 $ab \geq 24$ 이고

$\Delta OAB = \frac{1}{2}ab \geq \frac{1}{2} \times 24 = 12$ 이다.

따라서, ΔOAB 의 넓이의 최솟값은 12

6. 좌표평면 위에서 $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - ky + 5 = 0$ 이 두 개의 직선을 나타낼 수 있도록 하는 k 의 값을 구하면? (단, $k < 5$)

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

x 에 관해서 정리하면, $x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - ky - 5 = 0 \cdots \text{㉠}$

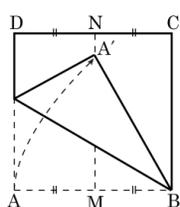
㉠이 두 일차식의 곱으로 나타내어지므로

$$D/4 = (y-2)^2 - (2y^2 - ky + 5)$$

$= -y^2 + (k-4)y - 1$ 이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\therefore D = (k-4)^2 - 4 = 0 \text{에서 } k = 2$$

7. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 모양의 종이를 꼭지점 A 가 선분 MN 위에 놓이도록 접었을 때, 점 A 가 선분 MN 과 만나는 점을 A' 이라 하자. 이 때, 점 A 와 직선 A'B 사이의 거리는? (단, M 은 선분 AB 의 중점, N 은 선분 CD 의 중점이다.)



- ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{3}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

정사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 놓자.
 점 M 을 원점으로 하고 직선 AB 를 x 축 위에 잡으면

$\overline{AM} = \overline{MB} = 1$ 이므로

$A(-1, 0), B(1, 0)$

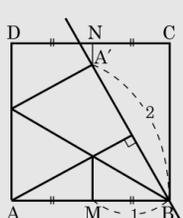
$\overline{A'B} = \overline{AB} = 2$, $A'(0, \sqrt{3})$ 이다.

직선 A'B 의 방정식은 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$

이므로,

점 A 에서 직선 A'B 사이의 거리는

$$\frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \sqrt{3}$$



8. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x-3y|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, $y = \pm \frac{4x-3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

9. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 $A(0, 5)$ 와 $B(8, 1)$ 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \leq a \leq 8$)

- ① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$
 $\therefore x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$
 이 원이 두 점 $A(0, 5), B(8, 1)$ 을 지나므로
 $a^2 - 10b + 25 = 0, a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$
 두 식을 연립하면
 $4a^2 - 80a + 300 = 0, 4(a-5)(a-15) = 0$
 그런데
 $0 \leq a \leq 8$ 이므로 $a = 5, b = 5$ 이다.
 이 때, 직선 AB 의 방정식은
 $y - 5 = \frac{1-5}{8-0}(x-0)$
 $\therefore x + 2y - 10 = 0$
 따라서 원의 중심 $(5, 5)$ 와 직선 AB 사이의 거리 d 는
 $d = \frac{|5 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$

10. $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $P(x, y)$ 와 두 점 $A(0, -4), B(3, 0)$ 으로 이루어지는 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최대값은?

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$\triangle ABP$ 에서 \overline{AB} 를 밑변으로 보면
높이는 원 위의 점 P 에서 직선 AB 에
이르는

거리이므로, 높이가 최대가 되는 경우는
다음 그림과 같이 직선 PH 가 원의 중심
을 지날 때이다.

직선 AB 의 방정식이 $4x - 3y - 12 = 0$
이므로

원의 중심에서 직선에 이르는 거리는

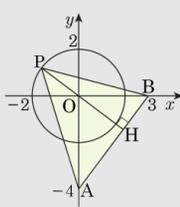
$$\frac{|-12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{12}{5}$$

따라서 삼각형의 높이는

$$\frac{12}{5} + 2 = \frac{22}{5} \text{ 이므로}$$

$\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{22}{5} = 11$$



11. $\{\{0\}, 1, 2, \{1, 2\}, \{\emptyset\}\}$ 를 원소로 가지는 집합 A 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

- ① $\emptyset \in A$ ② $\{0\} \subset A$ ③ $\{1, 2\} \subset A$
④ $\{1\} \in A$ ⑤ $\{\emptyset\} \subset A$

해설

- ① $\{\emptyset\} \in A$
② $\{\{0\}\} \subset A$
④ $1 \in A$
⑤ $\{\{\emptyset\}\} \subset A$

12. 집합 $A = \{1, 2, \emptyset, \{1, 2\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\{1, 2\} \notin A$ ② $\emptyset \subset A$ ③ $\emptyset \in A$
④ $A \subset A$ ⑤ $1 \in A$

해설

① $\{1, 2\} \in A$

13. 집합 P 에 대하여 $2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 로 정의한다. $A = \{1, 2, 4\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\emptyset \in 2^A$ ② $\emptyset \subset 2^A$ ③ $\{\emptyset\} \in 2^A$
④ $\{\emptyset\} \subset 2^A$ ⑤ $A \in 2^A$

해설

$2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 는 집합 A 의 부분집합의 집합을 의미한다. 집합 A 의 부분집합은 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$ 이다.

따라서 2^A 를 원소나열법으로 나타내면 $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$ 이다.

③ $\{\emptyset\} \notin 2^A$

14. 집합 $S = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}\right\}$ 의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{31}$ 이라 하자. 각 집합 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{31}$ 에서 최소인 원소를 각각 뽑아 이들을 모두 더한 값을 구하면 $\frac{p}{q}$ (p, q 는 서로소)이다. 이 때, $p - q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 130

해설

㉠ $\frac{1}{3^4}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^4}$ 을 포함하는 S 의 부분집합의 수와 같다.
 $\therefore 2^4$ 개

㉡ $\frac{1}{3^3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^3}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.
 $\therefore 2^3$ 개

㉢ $\frac{1}{3^2}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^2}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.
 $\therefore 2^2$ 개

㉣ $\frac{1}{3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.
 $\therefore 2$ 개

㉤ 1이 가장 작은 원소가 되는 경우는 1가지이다.

그러므로 구하는 값은 $\frac{1}{3^4} \times 2^4 + \frac{1}{3^3} \times 2^3 + \frac{1}{3^2} \times 2^2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1 =$
 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 1 = \frac{16 + 24 + 36 + 54 + 81}{81} =$
 $\frac{211}{81}$

$\therefore p = 211, q = 81$ 이므로 $p - q = 130$

15. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $A \subset B \subset X$ 를 만족하는 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

- ① 8 개 ② 16 개 ③ 24 개 ④ 27 개 ⑤ 32 개

해설

$A \subset B \subset X$ 를 만족하는 두 집합 A, B 를 집합 B 의 원소의 개수에 따라 분류해 보면

- i) $n(B) = 0$ 일 때, $B = \emptyset$ 이면 $A = \emptyset$ 이므로 1가지이다.
 - ii) $n(B) = 1$ 일 때, $B = \{1\}, \{2\}, \{3\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 2가지씩이므로 6가지이다.
 - iii) $n(B) = 2$ 일 때, $B = \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 4가지씩이므로 12가지이다.
 - iv) $n(B) = 3$ 일 때, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 A 는 8가지이다.
- 따라서 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $1 + 6 + 12 + 8 = 27$ (개)이다.

16. 집합 $A_n = \{x \mid 2n-1 \leq x \leq 5n+1\}$ 에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$ 가 성립하는 자연수 n 의 최댓값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \mid 1 \leq x \leq 6\} \\ A_n &= \{x \mid 2n-1 \leq x \leq 5n+1\} \\ \therefore 2n-1 &\leq 6 \Rightarrow n \leq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 3

해설

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \mid 1 \leq x \leq 6\}, A_2 = \{x \mid 3 \leq x \leq 11\}, A_3 = \{x \mid 5 \leq x \leq 16\}, \\ A_4 &= \{x \mid 7 \leq x \leq 21\} \text{ 이상에서 } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset \\ \therefore n \text{의 최댓값은 } 3 \end{aligned}$$

17. $A_N = \{x | x \text{는 } n \text{의 약수, } n \text{은 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$ 일 때, $n((A_M \cup A_N) - (A_M - A_N)) = 3$ 을 만족하는 N 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 25

▷ 정답 : 49

해설

$$\begin{aligned} & (A_M \cup A_N) - (A_M - A_N) \\ &= (A_M \cup A_N) \cap (A_M \cap A_N^c)^c \\ &= (A_M \cup A_N) \cap (A_M^c \cup A_N) \\ &= A_N \cup (A_M \cap A_M^c) \\ &= A_N \end{aligned}$$

$$\therefore n(A_N) = 3$$

$A_N = \{x | \frac{n}{x} = k, k \text{는 자연수}\}$ 일 때,

$n(A_N) = 3$ 을 만족하는 N 은 4, 9, 25, 49 이다.

18. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = n(C)$ 이고, $(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \emptyset$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $n(A - C) = 0$
- ② $\frac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C)$
- ③ $n(A \cap C) = n(B)$
- ④ $\frac{n(A) + n(C)}{2} = n(B)$
- ⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C)$

해설

$(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \emptyset$ 이면 $A - B = \emptyset$, $B - C = \emptyset$ 이므로 $A \subset B$, $B \subset C$

또, $n(A) = n(C)$, $A \subset C$ 이므로 $A = C$

따라서 $A = B = C$

① $n(A - C) = 0 \rightarrow A = C$ 이므로 옳다.

② $\frac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C) \rightarrow 1 \times n(B) = n(C)$ 이므로 옳다.

③ $n(A \cap C) = n(B) \rightarrow$ 옳다.

④ $\frac{n(A) + n(C)}{2} = n(B) \rightarrow$ 옳다.

⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C) \rightarrow n((A \cap C) - B) = 0$ 이므로 옳지 않다.

19. 75 명의 학생을 대상으로 조사를 하였더니 영어학원을 다니는 학생은 24 명, 수학을 다니지 않는 학생은 32 명이였다. 영어학원과 수학을 모두 다니지 않는 학생 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

조사한 학생의 집합을 U , 영어학원을 다니는 학생의 집합을 A , 수학을 다니는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 75, n(A) = 24, n(B^c) = 32$$

$$n(B) = n(U) - n(B^c) = 75 - 32 = 43$$

$A \cap B = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B)$ 이 최대이므로 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 $24 + 43 = 67$ 이다.

$$\therefore (n((A \cup B)^c) \text{의 최솟값}) = m = 75 - 67 = 8$$

$A \subset B$ 일 때, $n(A \cup B)$ 이 최소이므로 $n(A \cup B)$ 의 최솟값은 $n(B) = 43$

$$\therefore (n((A \cup B)^c) \text{의 최댓값}) = M = 75 - 43 = 32$$

따라서 $M - m = 32 - 8 = 24$ 이다.

20. x, y 가 실수일 때, 다음 중 조건 p 가 조건 q 의 필요충분 조건인 것은?

- ① $p: x+y \geq 4, q: x \geq 2$ 또는 $y \geq 2$
- ② $p: x+y$ 는 유리수, $q: x, y$ 는 모두 유리수
- ③ $p: xy > x+y > 4, q: x > 2$ 이고 $y > 2$
- ④ $p: xy + 1 > x+y > 2, q: x > 1$ 이고 $y > 1$
- ⑤ $p: |x| > |y|, q: x > y$

해설

- ① 충분조건
- ② 필요조건
- ③ 필요조건
- ⑤ 아무 조건 아님

21. 두 사람 갑, 을이 같은 거리를 여행하는데, 갑은 거리의 반을 a 의 속력으로, 나머지 거리를 b 의 속력으로 가고, 을은 총 걸린 시간 중 반을 a 의 속력으로, 나머지 시간을 b 의 속력으로 갔다. 각각의 평균속력을 A, B라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $A \leq B$ ② $A \geq B$ ③ $A = B$
④ $A < B$ ⑤ $A > B$

해설

거리를 l 이라 하고, 갑이 걸린 시간을 t_1 이라 하면

$$t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{b}$$

따라서 A의 평균속력은

$$A = \frac{l}{t_1} = \frac{l}{\frac{l}{2a} + \frac{l}{2b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

또, 을의 평균속력은 $B = \frac{1}{2}(a+b)$

그런데, $\frac{1}{2}(a+b) \geq \frac{2ab}{a+b}$ 이므로

$B \geq A$

22. a, b 는 양의 상수이다. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$, $x > 0$, $y > 0$ 일 때, $x + y$ 의 최솟값은?

- ① $2\sqrt{ab}$ ② $4\sqrt{ab}$ ③ $a + b + 2\sqrt{ab}$
④ $a + b + 4\sqrt{ab}$ ⑤ $ab + 3\sqrt{ab}$

해설

(산술평균) \geq (기하평균) 이므로

$$(x+y) \cdot 1 = (x+y) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right)$$

$$= a + b + \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} \geq a + b + 2\sqrt{\frac{ay}{x} \cdot \frac{bx}{y}}$$

$$= a + b + 2\sqrt{ab}$$