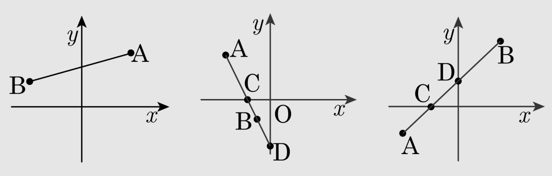
1. 좌표평면 위에 두 점 A, B 와 x 축 위의 점 C, y 축 위의 점 D 가 있다. 점 C 는 선분 AB 의 내분점이고, 점 D 는 선분 AB 의 외분점일 때, 다음 중 옳은 설명을 모두 고른 것은?

> ㉠ 점 A 가 제 1사분면의 점이면 점 B 는 제 2사분면의 점이다.
> ㉡ 점 A 가 제 2사분면의 점이면 점 B 는 제 3사분면의 점이다.
> ㉢ 점 A 가 제 3사분면의 점이면 점 B 는 제 1사분면의 점이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

ⅰ) 문제에서 점 C 는 선분 AB 의 내분점이므 로, 점 C 는 선분 AB 와 x 축의 교점이다.
ⅱ) 점 D 는 선분 AB 의 외분점이므로, 점 D 는 선분 AB 의 연장선과 y 축의 교점이다.
㉠, ㉡, ㉢의 세 가지 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



x 축 위의 점 C 가 선분 AB 의 내분점이므로 두점 A, B 는 x 축에 대하여 서로 반대편에 놓이게 된다.
그러므로 ㉠은 옳지 않다.
y 축 위의 점 D 는 선분 AB 의 외분점이므로 점 D 는 직선 AB 위의 점이지만 선분 AB 위의 점은 아니다.
그러므로 ㉡은 옳지만 ㉢은 옳지 않다.

2. 원 점 O를 한 꼭짓점으로 하는 △OAB의 무게중심의 좌표가 (8, 6)이다. 이를 만족하는 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$가 반드시 지나는 정점의 좌표를 (p, q)라 할 때, $p+q$의 값을 구하면?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

$\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(c, d)$라 하면,

무게중심은 $\left(\dfrac{a+c}{3}, \dfrac{b+d}{3}\right) = (8, 6)$이므로

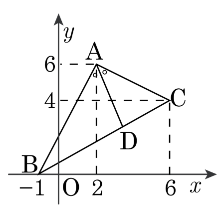
$a+c=24, \quad b+d=18$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점은

$\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{b+d}{2}\right) = (12, 9)$

$\therefore \quad p+q=21$

3. 다음 그림과 같이 세 점 $A(2, 6)$, $B(-1, 0)$, $C(6, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, 점 D 의 좌표는?



① $\left(2, \frac{6}{5}\right)$　② $\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$　③ $\left(\frac{14}{5}, 2\right)$　④ $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$　⑤ $\left(\frac{18}{5}, \frac{14}{5}\right)$

해설

점 D 는 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.
$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$,
$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로
$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$
따라서 점 D 는 선분 BC 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점이므로
점 D 의 좌표는 $\left(\frac{18-2}{3+2}, \frac{12+0}{3+2}\right)$
$\therefore \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$

4. 점 A$(3,\ -1)$과 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x+2y-5=0$　　② $2x-2y+5=0$

③ $2x-y-5=0$　　④ $x+y-5=0$

⑤ $2x+2y-5=0$

해설

$x+y-3=0$ 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(a,\ -a+3)$ 이라 하고 $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 중점의 좌표를 $\mathrm{Q}\,(x,\ y\,)$라 하면

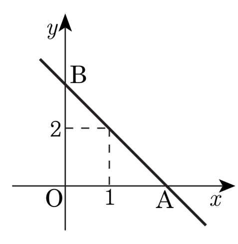
$$x=\frac{a+3}{2},\quad y=\frac{-a+2}{2}$$

$\therefore\ a=2x-3,\quad a=-2y+2$

$\therefore\ 2x-3=-2y+2$

$\therefore\ 2x+2y-5=0$

5. 평면위의 점 (1, 2) 를 지나는 직선과 x축, y축과의 교점을 각각 A, B 라고 하고 원점을 O라 할 때, 삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값은?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

A(a, 0), B(0, b)이라 하면

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 점 (1, 2)를 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$이다.

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$에서 ($a>0, b>0$산술기하)

$2\sqrt{\frac{2}{ab}}\leq 1$

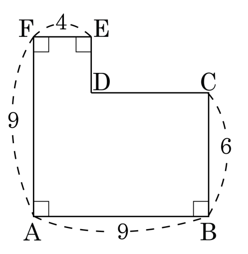
$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{ab}\leq\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{ab}{2}\geq 4 \therefore ab\geq 8$이다.

여기서 $\triangle$OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\geq 4$이므로

최솟값은 4이다.

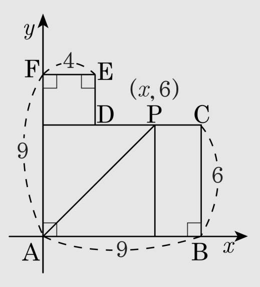
6. 아래 그림과 같은 도형 ABCDEF가 있다. 변 CD 위에 한 점 P를 잡아 선분 AP를 그었더니 선분 AP에 의해 도형의 넓이가 이등분되었다. 이 때, 선분 AP의 길이를 구하면?



① $\sqrt{83}$ ② $\sqrt{84}$ ③ $\sqrt{85}$ ④ $\sqrt{86}$ ⑤ $\sqrt{87}$

해설

그림과 같이 좌표평면 위에서 변 AB가 x축,
점 A가 원점이 되도록 하고, P$(x,\ 6)$이라고 하면
$\overline{\mathrm{PC}} = 9 - x$이다.
이 때, 도형 ABCDEF의 넓이는 66이므로
사다리꼴 ABCP의 넓이는 33이다.



$\frac{1}{2} \times 6 \times \{9 + (9 - x)\} = 33$에서 $x = 7$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(7-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{85}$

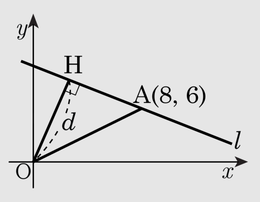
7. 좌표평면 위에서 점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 임의의 직선과 원점사이의 거리의 최댓값은?

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 직선을 l , 원점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 OAH 에서 $\overline{OH} \le \overline{OA}$ 이므로, 원점 O 에서 직선 l 까지의 거리 d 는 $d \le \overline{OA} = \sqrt{8^2+6^2} = 10$

$\therefore\ d \le 10$



따라서 d 의 최댓값은 10 이다.

8. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각을이등분하는 직선이 점 $(a,-1)$ 를 지날 때, a 의 값의 합은?

① -8　② -6　③ -4　④ -2　⑤ 0

해설

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $\mathrm{P}(a,\ -1)$ 라 하면 점 P 에서 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 까지의 거리가 같으므로

$d=\frac{|2a+1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$|2a|=|a-3|$

$\therefore\ 2a=a-3$ 또는 $2a=-(a-3)$ 이므로

$a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

9. 두 점 $\mathrm{A}(-5,\ -2)$, $\mathrm{B}(2,\ 5)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle\mathrm{ABP}$ 의 무게중심 G 는 중심이 $(a,\ b)$ 이고 반지름이 c 인 원 위를 움직이게 된다. 이 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ -1　　⑤ 0

해설

$\mathrm{P}=(\alpha,\ \beta)$ 라 하면,

$$\mathrm{G}=\left(\frac{-5+2+\alpha}{3},\ \frac{-2+5+\beta}{3}\right)$$

$$=\left(-1+\frac{\alpha}{3},\ 1+\frac{\beta}{3}\right)$$

$-1+\frac{\alpha}{3}=p$, $1+\frac{\beta}{3}=q$ 라 하면,

$\alpha=3p+3$, $\beta=3q-3$, $\alpha^2+\beta^2=9$ 이므로

$\therefore\ (3p+3)^2+(3q-3)^2=9$

$\Rightarrow\ (p+1)^2+(q-1)^2=1$

$\Rightarrow$ 중심이 $(-1,\ 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원

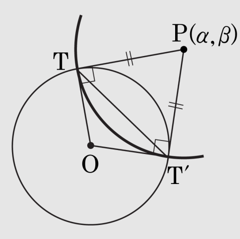
$\therefore\ a+b+c=1$

10. 원 $x^2+y^2=a^2$ 밖의 한 정점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ 로부터 이 원에 두 접선을 그었을 때, 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

① $\alpha x+\beta y=a^2$　② $\alpha x+\beta y=1$　③ $\beta x+\alpha y=a^2$
④ $\beta x+\alpha y=1$　⑤ $\beta x-\alpha y=a^2$

해설

점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ 에서
원 $x^2+y^2=a^2\cdots$ ㉠ 에 그은 접선의 접점을 T, T′ 이라 하면,
$\overline{\mathrm{PT}}=\overline{\mathrm{PT'}}$
따라서 직선 TT′ 은 주어진 원과 중심 P,
반지름 $\overline{\mathrm{PT}}$ 인 원과의 공통현 이다.
$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PO}}^2-\overline{\mathrm{TO}}^2=\alpha^2+\beta^2-a^2$



$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\overline{\mathrm{PT}}^2$
$\therefore\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-a^2\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡을 하면,
$x^2+y^2-(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$
$=-\alpha^2-\beta^2+2a^2$
$\therefore\ 2\alpha x+2\beta y=2a^2$
$\therefore\ \alpha x+\beta y=a^2$

11. 원 $x^2+y^2=4$ 밖의 한 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$ 에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은?

① $x-3y=4$ ② $3x-y=4$ ③ $x+3y=4$

④ $3x+y=4$ ⑤ $3x+2y=4$

해설

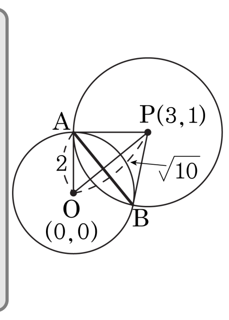
$\overline{\mathrm{AB}}$는 주어진 원과 중심 P, 반지름 $\overline{\mathrm{PA}}$ 인 원과의 공통현이다.

$(x-3)^2+(y-1)^2=\overline{\mathrm{PA}}^2=6$

따라서 직선 AB 의 방정식은

$(x-3)^2+(y-1)^2-x^2-y^2=6-4$

이것을 정리하면, $3x+y=4$



12. 다음 중 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하고 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $x+\sqrt{3}y=1$　② $\sqrt{3}x+y=1$　③ $x-\sqrt{3}y=-1$
④ $\sqrt{3}x-y=-3$　⑤ $x+y=2$

해설

원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 넓이를 이등분하기
위해서는 중심 $(1,0)$을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$을 지나는 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은
$y=m(x-1)$, $mx-y-m=0$
중심$(-1,0)$에서 이 직선에 이르는 거리가
반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$\therefore\ m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,
$x+\sqrt{3}y=1$ 또는 $x-\sqrt{3}y=1$

13. 2개의 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

① $\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

② $\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$

③ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{4}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{8}$

④ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{10}$

⑤ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{12}$

해설

$x^2 + y^2 = 1 \cdots\cdots$ ①

$(x-4)^2 + y^2 = 4 \cdots\cdots$ ②

공통접선을 $y = mx + n \cdots\cdots$ ③이라 하면

①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,

②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로

$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1$이고

$\frac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2$

$\Rightarrow\ m^2 + 1 = n^2 \cdots\cdots$ ④

$4(m^2+1) = (4m+n)^2 \cdots$ ⑤

④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면

$(4m+3n)(4m-n) = 0$

$n = -\frac{4}{3}m$에서 $m = \pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$

$n = 4m$에서 $m = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

$\therefore\ m = \pm\frac{3\sqrt{7}}{7},\ \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

14. 원 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 위의 점에서 직선 $x+y+1=0$ 에 이르는 거리의 최대값과 최소값의 합은?

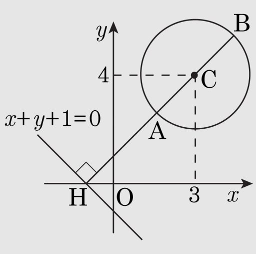
① $4\sqrt{2}$　　② $8\sqrt{2}$　　③ $8\sqrt{2}+2$

④ $8\sqrt{2}+4$　　⑤ $16\sqrt{2}$

해설

$(x-3)^2+(y-4)^2=4$

다음 그림에서 원 위의 점에서 직선까지 거리의 최대값은 $\overline{\mathrm{BH}}$, 최솟값은 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이다.



$$\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BH}}=(\overline{\mathrm{CH}}-\overline{\mathrm{CA}})+(\overline{\mathrm{CH}}+\overline{\mathrm{CA}})$$
$$=2\overline{\mathrm{CH}}=2\cdot\frac{|3+4+1|}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$$

15. 방정식 $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 4my + 4m^2 - 9 = 0$ 이 나타내는 원 중에서 반지름의 길이가 최소인 원을 C 라 할 때, C 위의 점 P 에서 점 Q(4, 1) 에 이르는 거리의 최솟값을 구하면?(단, m 은 실수)

① $\sqrt{15}-1$　② $\sqrt{15}-2$　③ $\sqrt{15}-3$
④ $\sqrt{17}-2$　⑤ $\sqrt{17}-3$

해설

원의 방정식을 정리하면,
$\{x+(m-1)\}^2 + (y-2m)^2 = (m-1)^2 + 9$
$\therefore$ $m = 1$ 일때 반지름이 3으로써 최소이다.
$\Rightarrow$ $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 Q 에서 원 중심까지 거리에서 반지름을 뺀 값과 같다.
$\therefore$ $\overline{PQ}$ 의
최솟값은 $\sqrt{4^2+1^2}-3$
$= \sqrt{17}-3$

16. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 32\}$ 의 부분집합 S 가 다음 조건을 만족할 때 $n(S)$ 의 최댓값은?

$a \in S,\ b \in S\ (a \neq b)$ 이면 $a + b \neq 5k$ (k는 자연수)

① 6　② 7　③ 10　④ 15　⑤ 20

해설

1 에서 32까지의 자연수를 5로 나누었을 때, 나머지에 따라 5 개의 집합으로 분류하면

$A_0 = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$

$A_1 = \{1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ 31\}$

$A_2 = \{2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32\}$

$A_3 = \{3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28\}$

$A_4 = \{4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24,\ 29\}$

구하는 집합 S 의 원소는 A_0 의 원소 중 1 개, A_1 과 A_4 의 원소 중 한 쪽 것만 택해야 하므로 큰 쪽인 A_1 의 7 개, A_2 와 A_3 중 A_2 의 7 개를 택하면 $n(S)$ 의 최댓값은 15 (개) 이다.

17. 두 집합 $A = \{3, 6, a+2, 10\}$, $B = \{2 \times a, 3, b, 5\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

집합 A 에 원소 5 가 속해야 하므로 $a+2=5$ 이다. $\therefore\ a=3$
$A=\{3,6,5,10\}$, $B=\{6,3,b,5\}$ 에서
원소 10 이 집합 B 에 있어야 하므로 $b=10$ 이다.
따라서 $a+b=3+10=13$ 이다.

18. 집합 $S = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A 의 개수를 구하여라.

• $x \in A$ 이면 $-x \in A$

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 7 개

해설

주어진 집합은 절댓값이 같은 두 원소가 반드시 함께 A 의 원소이어야 한다.
(1) 원소의 개수가 1 개인 집합 : $\{0\} \Rightarrow 1$ 개
(2) 원소의 개수가 2 개인 집합 : $\{-2, 2\}, \{-1, 1\} \Rightarrow 2$ 개
(3) 원소의 개수가 3 개인 집합 : $\{-2, 0, 2\}, \{-1, 0, 1\} \Rightarrow 2$ 개
(4) 원소의 개수가 4 개인 집합 : $\{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow 1$ 개
(5) 원소의 개수가 5 개인 집합 : $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow 1$ 개
따라서 집합 A 의 개수는 $1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$ (개)

19. 집합 $S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중에서 홀수가 하나만 속하는 것을 $A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots, A_n$이라 하고, $A_k(k = 1,\ 2, \cdots, n)$의 원소의 합을 S_k라고 할 때, $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n$의 값은?

① 216　② 240　③ 672　④ 696　⑤ 728

해설

집합 S 에 홀수 1, 3, 5 가 있으므로 홀수를 하나만 포함하는 부분집합의 개수를 구할 때,1을 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수는
$2^{6-3} = 8$ (개) $\cdots$㉠
3을 포함하고 1, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수는
$2^{6-3} = 8$ (개) $\cdots$㉡
5를 포함하고 1, 3 을 포함하지 않는 부분집합의 개수는
$2^{6-3} = 8$ (개) $\cdots$㉢
이므로 모두 24 개이다. 이 24개의 부분집합의 열을 $A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots, A_{24}$ 라 하면 $A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots, A_{24}$ 에는 S 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 이 각각 몇 개씩 들어갈까? 우선 1 을 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8개이므로 1이 8번 들어가는 것은 분명하다. 그러면 3, 5 는 들어가지 않으니 문제 삼지 말고 2, 4, 6 은 몇 번 들어갈까?
구체적으로 나열하면$\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{1,6\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,6\}$, $\{1,4,6\}$, $\{1,2,4,6\}$이 되어 2, 4, 6 은 각각 4번씩 들어간다. 따라서 ㉠의 8개의 집합 안에는 1이 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩㉡의 8개의 집합 안에는 3이 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩㉢의 8개의 집합 안에는 5가 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩 들어가므로
$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{24} = 8(1+3+5) + 12(2+4+6) = 216$
그런데, 여기서 원소의 총합에 대한 규칙성을 발견해 보면 2, 4, 6 이 각각 4번씩 나오는데 그 이유를 알아보자.1을 반드시 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합 중에서 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 1, 2, 3, 5 를 제외한 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-4} = 4$ (개)이다.

20. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 다음 두 조건을 동시에 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

> ㈎ 집합 X 는 적어도 하나의 홀수를 포함한다.
>
> ㈏ $n(X) \leq 5$

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 112 개

해설

전체집합 U 의 부분집합의 개수는
$2^7 = 128$ (개)
이 중 홀수를 포함하지 않는 집합의 개수는
$2^{7-4} = 2^3 = 8$(개)
따라서 ㈎를 만족하는 집합 X 의 개수는
$128 - 8 = 120$(개)
이때, $n(X) = 6$ 인 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $\cdots$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 7 개로 이들은 모두 조건 ㈎를 만족한다.
또 $n(X) = 7$ 인 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 1 개로 이것도 역시 조건 ㈎를 만족한다.
따라서 구하는 집합 X 의 개수는 $120 - (7 + 1) = 112$(개)

21. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, $n(A^c)$ 의 값을 구하여라.

(가) $\{3, 4\} \subset A$
(나) $p \in A,\ q \in A$ 이면 $p + q \in A$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3, 4$ 는 집합 A 의 원소이므로 이 수를 이용하여 집합 A 의 원소가 될 수 있는 수들을 나열해보면 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 $\cdots$
따라서 $A^c = \{1, 2, 5\}$ 이고, $n(A^c) = 3$

22. 집합 S 의 부분집합 A, B 가 있다. $n(A \cap B) = 0$, $A^c = \{a, c, e\}$, $S - B = \{b, c, d, e, f\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$A^c = \{a, c, e\}$, $S - B = B^c = \{b, c, d, e, f\}$,
$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{c, e\}$,
$n(A \cap B) = 0$ 이므로
$A^c - (A \cup B)^c = B = \{a\}$,
$B^c - (A \cup B)^c = A = \{b, d, f\}$,
따라서 $A \cup B = \{a, b, d, f\}$,
$\therefore n(A \cup B) = 4$

23. 두 집합 $P,\ Q$ 에 대하여 집합의 연산 $\triangle$ 을 $X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ 로 약속할 때, $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$ 에 대하여 다음과 같다면 a 의 값은?

$(A \triangle B) \triangle C = \{1, 4, 9\}$

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$

$A \triangle B = \{1\}$, $\{1\} \triangle C = \{1, 4, 9\}$를 만족하려면 집합 C 에는 1은 없어야 하고 9는 있어야한다.

$\therefore a = 9$

24. $f_k(a) = (a$ 를 k 로 나누었을 때의 나머지$)$ 라고 정의한다.
자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A_k = \left\{x | f_k(x^2) = 1, x < 10\right\}$ 에 대하여 $n(A_3 \cap A_4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f_k(a) = (a$ 를 k 로 나누었을 때의 나머지$)$,
$A_k = \left\{x | f_k(x^2) = 1, x < 10\right\}$ 라는 조건에서
x^2 의 값이 될 수 있는 수는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 이다.
$A_3 = \{1,\ 4,\ 16,\ 25,\ 49,\ 64\}$,
$A_4 = \{1,\ 9,\ 25,\ 49,\ 81\}$,
$A_3 \cap A_4 = \{1,\ 25,\ 49\}$ 이다.
따라서, $n(A_3 \cap A_4) = 3$ 이다.

25. 네 명의 테니스 선수 정하, 준화, 경진, 선희가 토너먼트 경기를 하였다. 경기를 관람한 세 사람 *A*, *B*, *C* 에게 경기 결과를 물어 보았더니 다음과 같이 대답하였다.

A : 선희가 1 등, 경진이가 3 등을 했습니다. *B* : 준화가 2 등, 선희가 3 등을 했습니다. *C* : 정하가 1 등, 준화가 4 등을 했습니다.

이들 모두 두 선수의 순위를 대답했지만 그 두 선수의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 실제 선수들의 순위를 바르게 나열한 것은?

① 1등 : 경진, 2등 : 준화, 3등 : 정하, 4등 : 선희

② 1등 : 선희, 2등 : 정하, 3등 : 경진, 4등 : 준화

③ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 경진, 4등 : 선희

④ 1등 : 정하, 2등 : 경진, 3등 : 준화, 4등 : 선희

⑤ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 선희, 4등 : 경진

해설

만일, 선희가 1등한 것이 참이면 준화가 2등이고 정하가 1등이니 모순이다.
그러면, 경진이가 3등인 것이 참인데, 그렇게 되면 *B*의 대답에서 선희가 3등이라는 것이 거짓이므로 준화가 2등이고 준화가 4등인 것이 거짓이므로 정하가 1등이다.
따라서 1등은 정하, 2등은 준화, 3등은 경진, 4등은 선희가 된다.

26. 실수 $a,\ b,\ c$ 가 $a^2+b^2+c^2=1$ 을 만족한다. $ab+bc+ca$ 의 최대값, 최소값을 각각 $M,\ m$ 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}$　③ -1　④ 1　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$a,\ b,\ c$ 가 실수이므로 $(a+b+c)^2 \geq 0$
$\therefore a^2+b^2+c^2 \geq -2(ab+bc+ca) \cdots$ ㉠
또한 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \leq ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$
$a^2+b^2+c^2=1$ 이므로
$-\frac{1}{2} \leq ab+bc+ca \leq 1$
$\therefore M=1,\ m=-\frac{1}{2}$
$\therefore M+m=\frac{1}{2}$

27. $a > 0,\ b > 0$ 이고 $x = a + \frac{1}{b}$, $y = b + \frac{1}{a}$ 이라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$x^2 + y^2 = \left(a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(b^2 + \frac{2b}{a} + \frac{1}{a^2}\right)$

$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)$

그런데 $a > 0,\ b > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계에 의하여

$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2$

(등호는 $a^2 = \frac{1}{a}^2$ 일 때)

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$

(등호는 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ 일 때)

$b^2 + \frac{1}{b}^2 \geq 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{b^2}} = 2$

(등호는 $b^2 = \frac{1}{b^2}$ 일 때)

$\therefore\ x^2 + y^2 \geq 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 8$

따라서, $x^2 + y^2$ 의 최솟값은 8 이다.