

1. 좌표평면 위에 두 점 A, B와  $x$  축 위의 점 C,  $y$  축 위의 점 D가 있다. 점 C는 선분 AB의 내분점이고, 점 D는 선분 AB의 외분점일 때, 다음 중 옳은 설명을 모두 고른 것은?

- ㉠ 점 A가 제 1사분면의 점이면 점 B는 제 2사분면의 점이다.  
 ㉡ 점 A가 제 2사분면의 점이면 점 B는 제 3사분면의 점이다.  
 ㉢ 점 A가 제 3사분면의 점이면 점 B는 제 1사분면의 점이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

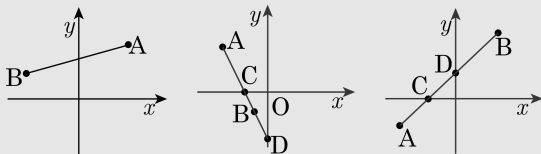
⑤ ㉡, ㉢

### 해설

i) 문제에서 점 C는 선분 AB의 내분점이므로, 점 C는 선분 AB와  $x$  축의 교점이다.

ii) 점 D는 선분 AB의 외분점이므로, 점 D는 선분 AB의 연장선과  $y$  축의 교점이다.

㉠, ㉡, ㉢의 세 가지 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$x$  축 위의 점 C가 선분 AB의 내분점이므로 두 점 A, B는  $x$  축에 대하여 서로 반대편에 놓이게 된다.

그러므로 ㉠은 옳지 않다.

$y$  축 위의 점 D는 선분 AB의 외분점이므로 점 D는 직선 AB 위의 점이지만 선분 AB 위의 점은 아니다.

그러므로 ㉡은 옳지만 ㉢은 옳지 않다.

2. 원 점 O를 한 꼭짓점으로 하는  $\triangle OAB$ 의 무게중심의 좌표가 (8, 6)이다. 이를 만족하는 두 점 A, B에 대하여  $\overline{AB}$ 가 반드시 지나는 점의 좌표를  $(p, q)$ 라 할 때,  $p + q$ 의 값을 구하면?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

A(a, b), B(c, d)라 하면,

무게중심은  $\left(\frac{a+c}{3}, \frac{b+d}{3}\right) = (8, 6)$ 이므로

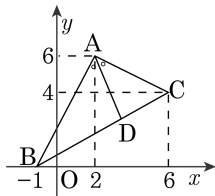
$$a + c = 24, \quad b + d = 18$$

$\therefore \overline{AB}$ 의 중점은

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) = (12, 9)$$

$$\therefore p + q = 21$$

3. 다음 그림과 같이 세 점  $A(2, 6)$ ,  $B(-1, 0)$ ,  $C(6, 4)$  를 꼭짓점으로 하는 삼각형  $ABC$  에서  $\angle A$  의 이등분선이 변  $BC$  와 만나는 점을  $D$  라고 할 때, 점  $D$  의 좌표는?



- ①  $\left(2, \frac{6}{5}\right)$                       ②  $\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$                       ③  $\left(\frac{14}{5}, 2\right)$   
 ④  $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$                       ⑤  $\left(\frac{18}{5}, \frac{14}{5}\right)$

#### 해설

점  $D$  는  $\angle A$  의 이등분선과 변  $BC$  의 교점이므로  
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$  이다.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$$

따라서 점  $D$  는 선분  $BC$  를  $3 : 2$  로 내분하는 점이므로

$$\text{점 } D \text{ 의 좌표는 } \left(\frac{18-2}{3+2}, \frac{12+0}{3+2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

4. 점 A(3, -1) 과 직선  $x + y - 3 = 0$  위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

①  $x + 2y - 5 = 0$

②  $2x - 2y + 5 = 0$

③  $2x - y - 5 = 0$

④  $x + y - 5 = 0$

⑤  $2x + 2y - 5 = 0$

해설

$x + y - 3 = 0$  위의 임의의 한 점을 P( $a$ ,  $-a + 3$ ) 이라 하고  $\overline{AP}$ 의 중점의 좌표를 Q ( $x$ ,  $y$ )라 하면

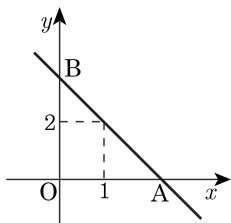
$$x = \frac{a+3}{2}, \quad y = \frac{-a+2}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 3, \quad a = -2y + 2$$

$$\therefore 2x - 3 = -2y + 2$$

$$\therefore 2x + 2y - 5 = 0$$

5. 평면위의 점 (1, 2) 를 지나는 직선과  $x$ 축,  $y$ 축과의 교점을 각각 A, B 라고 하고 원점을 O라 할 때, 삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

### 해설

$A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$ 이라 하면

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 점 (1, 2)를 지나므로

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \text{ 이다.}$$

$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$ 에서 ( $a > 0, b > 0$  산술기하)

$$2\sqrt{\frac{2}{ab}} \leq 1$$

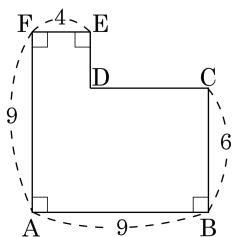
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{ab} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{2} \geq 4 \therefore ab \geq 8 \text{ 이다.}$$

여기서  $\triangle OAB$ 의 넓이는  $\frac{1}{2}ab \geq 4$ 이므로

최솟값은 4이다.

6. 아래 그림과 같은 도형 ABCDEF가 있다. 변 CD 위에 한 점 P를 잡아 선분 AP를 그었더니 선분 AP에 의해 도형의 넓이가 이등분되었다. 이 때, 선분 AP의 길이를 구하면?



①  $\sqrt{83}$

②  $\sqrt{84}$

③  $\sqrt{85}$

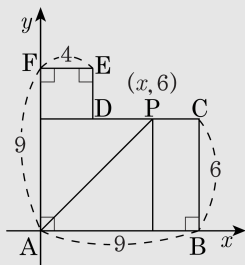
④  $\sqrt{86}$

⑤  $\sqrt{87}$

### 해설

그림과 같이 좌표평면 위에서 변 AB가  $x$ 축, 점 A가 원점이 되도록 하고,  $P(x, 6)$ 이라고 하면  $\overline{PC} = 9 - x$ 이다.

이 때, 도형 ABCDEF의 넓이는 66이므로 사다리꼴 ABCP의 넓이는 33이다.



$$\frac{1}{2} \times 6 \times \{9 + (9 - x)\} = 33 \text{에서 } x = 7 \text{이다.}$$

$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{(7-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{85}$$

7. 좌표평면 위에서 점  $A(8, 6)$  을 지나는 임의의 직선과 원점사이의 거리의 최댓값은?

① 6

② 8

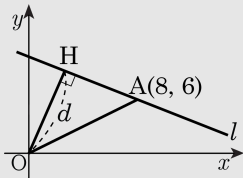
③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

점  $A(8, 6)$  을 지나는 직선을  $l$ , 원점  $O$  에서 직선  $l$  에 내린 수선의 발을  $H$  라 하면 직각삼각형  $OAH$  에서  $\overline{OH} \leq \overline{OA}$  이므로, 원점  $O$  에서 직선  $l$  까지의 거리  $d$  는  $d \leq \overline{OA} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$   
 $\therefore d \leq 10$



따라서  $d$  의 최댓값은 10 이다.

8. 두 직선  $2x - y - 1 = 0$ ,  $x + 2y - 1 = 0$  이 이루는 각을 이등분하는 직선이 점  $(a, -1)$  를 지날 때,  $a$  의 값의 합은?

① -8

② -6

③ -4

④ -2

⑤ 0

### 해설

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을  $P(a, -1)$  라 하면  
점 P 에서 두 직선  $2x - y - 1 = 0$ ,  $x + 2y - 1 = 0$  까지의 거리가  
같으므로

$$d = \frac{|2a + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$|2a| = |a - 3|$$

$$\therefore 2a = a - 3 \text{ 또는 } 2a = -(a - 3) \text{ 이므로}$$

$$a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\text{따라서 } a \text{ 의 값의 합은 } -3 + 1 = -2$$

9. 두 점  $A(-5, -2)$ ,  $B(2, 5)$  에 대하여 원  $x^2 + y^2 = 9$  위를 움직이는 점을  $P$  라고 할 때,  $\triangle ABP$  의 무게중심  $G$  는 중심이  $(a, b)$  이고 반지름이  $c$  인 원 위를 움직이게 된다. 이 때,  $a + b + c$  의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ -1

⑤ 0

해설

$P = (\alpha, \beta)$  라 하면,

$$\begin{aligned} G &= \left( \frac{-5 + 2 + \alpha}{3}, \frac{-2 + 5 + \beta}{3} \right) \\ &= \left( -1 + \frac{\alpha}{3}, 1 + \frac{\beta}{3} \right) \end{aligned}$$

$-1 + \frac{\alpha}{3} = p$ ,  $1 + \frac{\beta}{3} = q$  라 하면,

$\alpha = 3p + 3$ ,  $\beta = 3q - 3$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = 9$  이므로

$$\therefore (3p + 3)^2 + (3q - 3)^2 = 9$$

$$\Rightarrow (p + 1)^2 + (q - 1)^2 = 1$$

$\Rightarrow$  중심이  $(-1, 1)$  이고, 반지름이 1 인 원

$$\therefore a + b + c = 1$$

10. 원  $x^2 + y^2 = a^2$  밖의 한 점  $P(\alpha, \beta)$ 로부터 이 원에 두 접선을 그었을 때, 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

①  $\alpha x + \beta y = a^2$

②  $\alpha x + \beta y = 1$

③  $\beta x + \alpha y = a^2$

④  $\beta x + \alpha y = 1$

⑤  $\beta x - \alpha y = a^2$

### 해설

점  $P(\alpha, \beta)$ 에서

원  $x^2 + y^2 = a^2 \dots \textcircled{1}$ 에 그은 접선의 접점을  $T, T'$ 이라 하면,

$$\overline{PT} = \overline{PT'}$$

따라서 직선  $TT'$ 은 주어진 원과 중심  $P$ ,

반지름  $\overline{PT}$ 인 원과의 공통현이다.

$$\overline{PT}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{TO}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^2$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \overline{PT}^2$$

$$\therefore (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 \dots \textcircled{2}$$

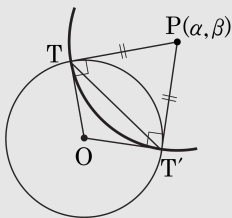
$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면,

$$x^2 + y^2 - (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

$$= -\alpha^2 - \beta^2 + 2a^2$$

$$\therefore 2\alpha x + 2\beta y = 2a^2$$

$$\therefore \alpha x + \beta y = a^2$$



11. 원  $x^2 + y^2 = 4$  밖의 한 점  $P(3, 1)$  에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은?

①  $x - 3y = 4$

②  $3x - y = 4$

③  $x + 3y = 4$

④  $3x + y = 4$

⑤  $3x + 2y = 4$

해설

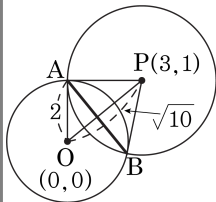
$\overline{AB}$ 는 주어진 원과 중심 P, 반지름  $\overline{PA}$  인  
원과의 공통현이다.

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = \overline{PA}^2 = 6$$

따라서 직선 AB 의 방정식은

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 - x^2 - y^2 = 6 - 4$$

이것을 정리하면,  $3x + y = 4$



12. 다음 중 원  $(x+1)^2 + y^2 = 1$  에 접하고 원  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

- ①  $x + \sqrt{3}y = 1$       ②  $\sqrt{3}x + y = 1$       ③  $x - \sqrt{3}y = -1$   
④  $\sqrt{3}x - y = -3$       ⑤  $x + y = 2$

### 해설

원  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  의 넓이를 이등분하기

위해서는 중심  $(1,0)$  을 지나야 한다.

곧,  $(1,0)$  을 지나는 원  $(x+1)^2 + y^2 = 1$  의 접선을 구하면 된다.

기울기를  $m$  이라 두면, 구하는 직선은

$$y = m(x-1), mx - y - m = 0$$

중심  $(-1,0)$  에서 이 직선에 이르는 거리가

반지름 1 과 같으면 된다.

$$\frac{|-m - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$\therefore m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,

$$x + \sqrt{3}y = 1 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y = 1$$

13. 2개의 원  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 4)^2 + y^2 = 4$  의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

①  $\pm \frac{3\sqrt{7}}{7}, \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$

②  $\pm \frac{3\sqrt{7}}{2}, \pm \frac{\sqrt{15}}{5}$

③  $\pm \frac{3\sqrt{7}}{4}, \pm \frac{\sqrt{15}}{8}$

④  $\pm \frac{3\sqrt{7}}{5}, \pm \frac{\sqrt{15}}{10}$

⑤  $\pm \frac{3\sqrt{7}}{8}, \pm \frac{\sqrt{15}}{12}$

### 해설

$$x^2 + y^2 = 1 \dots\dots ①$$

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4 \dots\dots ②$$

공통접선을  $y = mx + n \dots\dots ③$ 이라 하면

①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,

②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1 \text{ 이고}$$

$$\frac{|4m + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 = n^2 \dots\dots ④$$

$$4(m^2 + 1) = (4m + n)^2 \dots ⑤$$

④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면

$$(4m + 3n)(4m - n) = 0$$

$$n = -\frac{4}{3}m \text{에서 } m = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$n = 4m \text{에서 } m = \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\therefore m = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}, \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$$

14. 원  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$  위의 점에서 직선  $x + y + 1 = 0$  에 이르는 거리의 최대값과 최소값의 합은?

①  $4\sqrt{2}$

②  $8\sqrt{2}$

③  $8\sqrt{2} + 2$

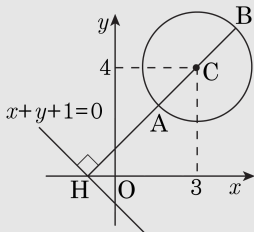
④  $8\sqrt{2} + 4$

⑤  $16\sqrt{2}$

해설

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

다 음 그 림 에  
서 원 위 의 점  
에 서 직 선 까 지  
거 리 의 최 대 값  
은  $\overline{BH}$ , 최 소 값  
은  $\overline{AH}$  의 길 이  
다.



$$\begin{aligned}\overline{AH} + \overline{BH} &= (\overline{CH} - \overline{CA}) + (\overline{CH} + \overline{CA}) \\ &= 2\overline{CH} = 2 \cdot \frac{|3 + 4 + 1|}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

15. 방정식  $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 4my + 4m^2 - 9 = 0$  이 나타내는 원 중에서 반지름의 길이가 최소인 원을 C 라 할 때, C 위의 점 P 에서 점 Q(4, 1) 에 이르는 거리의 최솟값을 구하면?(단,  $m$  은 실수)

①  $\sqrt{15} - 1$

②  $\sqrt{15} - 2$

③  $\sqrt{15} - 3$

④  $\sqrt{17} - 2$

⑤  $\sqrt{17} - 3$

### 해설

원의 방정식을 정리하면,

$$\{x + (m-1)\}^2 + (y - 2m)^2 = (m-1)^2 + 9$$

$\therefore m = 1$  일때 반지름이 3으로써 최소이다.

$\Rightarrow \overline{PQ}$  의 최솟값은 Q 에서 원 중심까지  
거리에서 반지름을 뺀 값과 같다.

$\therefore \overline{PQ}$  의

$$\text{최솟값은 } \sqrt{4^2 + 1^2} - 3$$

$$= \sqrt{17} - 3$$

16. 집합  $A = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ 의 부분집합  $S$ 가 다음 조건을 만족할 때  $n(S)$ 의 최댓값은?

$a \in S, b \in S$  ( $a \neq b$ ) 이면  $a + b \neq 5k$   
( $k$ 는 자연수)

① 6

② 7

③ 10

④ 15

⑤ 20

#### 해설

1에서 32까지의 자연수를 5로 나누었을 때, 나머지에 따라 5개의 집합으로 분류하면

$$A_0 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$

$$A_1 = \{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31\}$$

$$A_2 = \{2, 7, 12, 17, 22, 27, 32\}$$

$$A_3 = \{3, 8, 13, 18, 23, 28\}$$

$$A_4 = \{4, 9, 14, 19, 24, 29\}$$

구하는 집합  $S$ 의 원소는  $A_0$ 의 원소 중 1개,  $A_1$ 과  $A_4$ 의 원소 중 한 쪽 것만 택해야 하므로 큰 쪽인  $A_1$ 의 7개,  $A_2$ 와  $A_3$  중  $A_2$ 의 7개를 택하면  $n(S)$ 의 최댓값은 15(개)이다.

17. 두 집합  $A = \{3, 6, a + 2, 10\}$ ,  $B = \{2 \times a, 3, b, 5\}$  에 대하여  $A \subset B$ ,  $B \subset A$  일 때,  $a + b$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

집합  $A$  에 원소 5 가 속해야 하므로  $a + 2 = 5$  이다.  $\therefore a = 3$   
 $A = \{3, 6, 5, 10\}$  ,  $B = \{6, 3, b, 5\}$  에서  
원소 10 이 집합  $B$  에 있어야 하므로  $b = 10$  이다.  
따라서  $a + b = 3 + 10 = 13$  이다.

18. 집합  $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  의 공집합이 아닌 부분집합  $A$  가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합  $A$  의 개수를 구하여라.

$$\bullet x \in A \text{ 이면 } -x \in A$$



답 :

개



정답 : 7개

### 해설

주어진 집합은 절댓값이 같은 두 원소가 반드시 함께  $A$  의 원소  
이어야 한다.

- (1) 원소의 개수가 1 개인 집합 :  $\{0\} \Rightarrow 1$  개
  - (2) 원소의 개수가 2 개인 집합 :  $\{-2, 2\}, \{-1, 1\} \Rightarrow 2$  개
  - (3) 원소의 개수가 3 개인 집합 :  $\{-2, 0, 2\}, \{-1, 0, 1\} \Rightarrow 2$  개
  - (4) 원소의 개수가 4 개인 집합 :  $\{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow 1$  개
  - (5) 원소의 개수가 5 개인 집합 :  $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow 1$  개
- 따라서 집합  $A$  의 개수는  $1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$  (개)

19. 집합  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중에서 홀수가 하나만 속하는 것을  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 이라 하고,  $A_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 의 원소의 합을  $S_k$ 라고 할 때,  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ 의 값은?

㉠ 216

㉡ 240

㉢ 672

㉣ 696

㉤ 728

### 해설

집합  $S$ 에 홀수 1, 3, 5가 있으므로 홀수를 하나만 포함하는 부분집합의 개수를 구할 때, 1을 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8 \text{ (개)} \dots \textcircled{㉠}$$

3을 포함하고 1, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8 \text{ (개)} \dots \textcircled{㉡}$$

5를 포함하고 1, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8 \text{ (개)} \dots \textcircled{㉢}$$

이므로 모두 24개이다. 이 24개의 부분집합의 열을  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{24}$ 라 하면  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{24}$ 에는  $S$ 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각각 몇 개씩 들어갈까? 우선 1을 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8개이므로 1이 8번 들어가는 것은 분명하다. 그러면 3, 5는 들어가지 않으니 문제 삼지 말고 2, 4, 6은 몇 번 들어갈까?

구체적으로 나열하면  $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}$ 이 되어 2, 4, 6은 각각 4번씩 들어간다. 따라서 ㉠의 8개의 집합 안에는 1이 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 ㉡의 8개의 집합 안에는 3이 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 ㉢의 8개의 집합 안에는 5가 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 들어가므로  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{24} = 8(1 + 3 + 5) + 12(2 + 4 + 6) = 216$  그런데, 여기서 원소의 총합에 대한 규칙성을 발견해 보면 2, 4, 6이 각각 4번씩 나오는데 그 이유를 알아보자. 1을 반드시 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합 중에서 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 1, 2, 3, 5를 제외한 부분집합의 개수와 같으므로  $2^{6-4} = 4$  (개)이다.

20. 전체집합  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  의 부분집합 중에서 다음 두 조건을 동시에 만족하는 집합  $X$  의 개수를 구하여라. (단,  $n(X)$  는 집합  $X$  의 원소의 개수이다.)

(가) 집합  $X$  는 적어도 하나의 홀수를 포함한다.

(나)  $n(X) \leq 5$

▶ 답 :                      개

▷ 정답 : 112 개

#### 해설

전체집합  $U$  의 부분집합의 개수는

$$2^7 = 128 \text{ (개)}$$

이 중 홀수를 포함하지 않는 집합의 개수는

$$2^{7-4} = 2^3 = 8 \text{ (개)}$$

따라서 (가)를 만족하는 집합  $X$  의 개수는

$$128 - 8 = 120 \text{ (개)}$$

이때,  $n(X) = 6$  인 집합  $X$  는  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ,  $\dots$ ,  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  의 7개로 이들은 모두 조건 (가)를 만족한다.

또  $n(X) = 7$ 인 집합  $X$  는  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  의 1개로 이것도 역시 조건 (가)를 만족한다.

따라서 구하는 집합  $X$  의 개수는  $120 - (7 + 1) = 112 \text{ (개)}$

21. 자연수 전체의 집합  $N$  의 부분집합  $A$  가 다음과 같은 조건을 만족할 때,  $n(A^c)$  의 값을 구하여라.

(가)  $\{3, 4\} \subset A$

(나)  $p \in A, q \in A$  이면  $p + q \in A$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

3, 4 는 집합  $A$  의 원소이므로 이 수를 이용하여 집합  $A$  의 원소가 될 수 있는 수들을 나열해보면 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 ...

따라서  $A^c = \{1, 2, 5\}$  이고,  $n(A^c) = 3$

22. 집합  $S$  의 부분집합  $A, B$  가 있다.  $n(A \cap B) = 0$ ,  $A^c = \{a, c, e\}$ ,  $S - B = \{b, c, d, e, f\}$  일 때,  $n(A \cup B)$  를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$A^c = \{a, c, e\}, S - B = B^c = \{b, c, d, e, f\},$$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{c, e\},$$

$$n(A \cap B) = 0 \text{ 이므로}$$

$$A^c - (A \cup B)^c = B = \{a\},$$

$$B^c - (A \cup B)^c = A = \{b, d, f\},$$

$$\text{따라서 } A \cup B = \{a, b, d, f\},$$

$$\therefore n(A \cup B) = 4$$

23. 두 집합  $P, Q$ 에 대하여 집합의 연산  $\Delta$ 을  $X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ 로 약속할 때,  $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $B = \{2, 4, 8\}$ ,  $C = \{4, a\}$ 에 대하여 다음과 같다면  $a$ 의 값은?

$$(A\Delta B)\Delta C = \{1, 4, 9\}$$

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{2, 4, 8\}, C = \{4, a\}$$

$A\Delta B = \{1\}$ ,  $\{1\}\Delta C = \{1, 4, 9\}$ 를 만족하려면 집합  $C$ 에는 1은 없어야 하고 9는 있어야 한다.

$$\therefore a = 9$$

24.  $f_k(a) = (a \text{ 를 } k \text{ 로 나누었을 때의 나머지})$  라고 정의한다.  
자연수 전체의 집합  $N$  의 부분집합  $A_k = \{x | f_k(x^2) = 1, x < 10\}$  에  
대하여  $n(A_3 \cap A_4)$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f_k(a) = (a \text{ 를 } k \text{ 로 나누었을 때의 나머지})$ ,  
 $A_k = \{x | f_k(x^2) = 1, x < 10\}$  라는 조건에서  
 $x^2$  의 값이 될 수 있는 수는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 이다.  
 $A_3 = \{1, 4, 16, 25, 49, 64\}$  ,  
 $A_4 = \{1, 9, 25, 49, 81\}$  ,  
 $A_3 \cap A_4 = \{1, 25, 49\}$  이다.  
따라서,  $n(A_3 \cap A_4) = 3$  이다.

25. 네 명의 테니스 선수 정하, 준화, 경진, 선희가 토너먼트 경기를 하였다. 경기를 관람한 세 사람 A, B, C 에게 경기 결과를 물어 보았더니 다음과 같이 대답하였다.

A : 선희가 1 등, 경진이가 3 등을 했습니다.

B : 준화가 2 등, 선희가 3 등을 했습니다.

C : 정하가 1 등, 준화가 4 등을 했습니다.

이들 모두 두 선수의 순위를 대답했지만 그 두 선수의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 실제 선수들의 순위를 바르게 나열한 것은?

- ① 1등:경진, 2등:준화, 3등:정하, 4등:선희
- ② 1등:선희, 2등:정하, 3등:경진, 4등:준화
- ③ 1등:정하, 2등:준화, 3등:경진, 4등:선희
- ④ 1등:정하, 2등:경진, 3등:준화, 4등:선희
- ⑤ 1등:정하, 2등:준화, 3등:선희, 4등:경진

#### 해설

만일, 선희가 1등한 것이 참이면 준화가 2등이고 정하가 1등이니 모순이다.

그러면, 경진이가 3등인 것이 참인데, 그렇게 되면 B의 대답에서 선희가 3등이라는 것이 거짓이므로 준화가 2등이고 준화가 4등인 것이 거짓이므로 정하가 1등이다.

따라서 1등은 정하, 2등은 준화, 3등은 경진, 4등은 선희가 된다.

26. 실수  $a, b, c$  가  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  을 만족한다.  $ab + bc + ca$  의 최대값, 최소값을 각각  $M, m$  이라 할 때,  $M + m$  의 값은?

①  $-\frac{1}{2}$

②  $\frac{1}{2}$

③  $-1$

④  $1$

⑤  $\frac{1}{3}$

해설

$a, b, c$  가 실수이므로  $(a + b + c)^2 \geq 0$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq -2(ab + bc + ca) \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$\text{또한 } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서

$$-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$  이므로

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$$

$$\therefore M = 1, m = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore M + m = \frac{1}{2}$$

27.  $a > 0$ ,  $b > 0$ 이고  $x = a + \frac{1}{b}$ ,  $y = b + \frac{1}{a}$ 이라 할 때,  $x^2 + y^2$ 의 최솟값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

### 해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left( a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{1}{b^2} \right) + \left( b^2 + \frac{2b}{a} + \frac{1}{a^2} \right) \\ &= \left( a^2 + \frac{1}{a^2} \right) + 2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left( b^2 + \frac{1}{b^2} \right) \end{aligned}$$

그런데  $a > 0$ ,  $b > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2 \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2$$

$$(\text{등호는 } a^2 = \frac{1}{a^2} \text{ 일 때})$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

$$(\text{등호는 } \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \text{ 일 때})$$

$$b^2 + \frac{1}{b^2} \geq 2 \sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{b^2}} = 2$$

$$(\text{등호는 } b^2 = \frac{1}{b^2} \text{ 일 때})$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 8$$

따라서,  $x^2 + y^2$ 의 최솟값은 8이다.