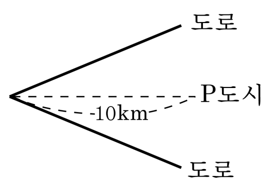
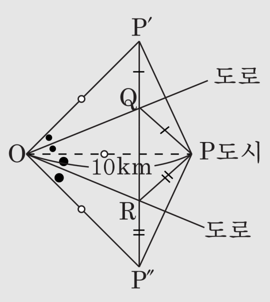
1. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 $45°$의 각 도로 교차 하고 있다. 두 도로의 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



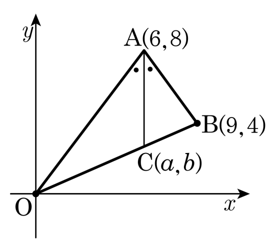
① $10\sqrt{2}$ km ② $12\sqrt{2}$ km ③ $14\sqrt{2}$ km
④ $16\sqrt{2}$ km ⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

두 도로에 대한 점 P의 대칭점을 각각 P′, P″ 이라 하면, $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RP''}\geq\overline{P'P''}$
두 길의 교점을 O 라 하면
$\overline{PO}=\overline{P'O}=\overline{P''O}=10$ 이고
두 도로가 이루는 각이 $45°$ 이므로
$\angle P'OP''=90°$
따라서 피타고라스 정리에 의하여 새로운 도로의 합의 최솟값은 $\overline{P'P''}=10\sqrt{2}$ km 이다.



2. 다음 그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(6,\ 8)$, $\mathrm{B}(9,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle \mathrm{AOB}$가 있다. $\angle \mathrm{A}$ 의 이등분선이 변 OB 와 만나는 점을 $\mathrm{C}(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값은?



① 12　　② 14　　③ 15

④ 16　　⑤ 18

해설

$\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{BAC}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OC}} : \overline{\mathrm{CB}}$가 성립한다.

이때, $\overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(9-6)^2 + (4-8)^2} = 5$ 이므로

점 C 는 $\overline{\mathrm{OB}}$ 를 $10 : 5$,

즉 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.

따라서 점 C 의 좌표는

$$\mathrm{C}\left(\frac{2\times 9 + 1\times 0}{2+1},\ \frac{2\times 4 + 1\times 0}{2+1}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{C}\left(6,\ \frac{8}{3}\right) \quad \therefore\ ab = 6\cdot\frac{8}{3} = 16$$

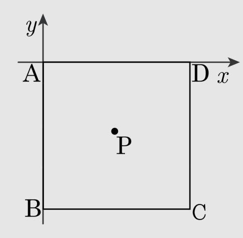
3. 한 변의 길이가 2 인 정사각형 ABCD 의 내부에 한 점 P 가 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$ 을 만족시킬 때, 점 P 의 자취의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$,

$\mathrm{D}(2,\ 0)$, $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라고하면 $2 \cdot \overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$ 이므로



$2 \cdot (a^2 + b^2)$

$= a^2 + (b+2)^2 + (a-2)^2 + b^2$

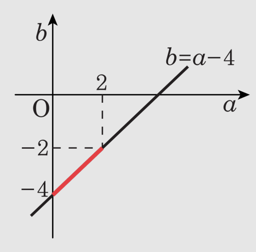
$0 = b - a + 4$

$\therefore\ \mathrm{P}(a,\ b) = (a,\ a-4)$

점 P 의 자취는 $b = a - 4\ (0 < a < 2)$ 와 같으므로

구하는 길이는 두 점 $(0,\ -4)$ 아 $(2,\ -2)$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore\ \sqrt{(2-0)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$



4. 정점 A (3 ,−1)과 직선 $y = 3x + 1$ 위의 동점 P 를 잇는 선분 AP 를 2 :1 로 내분하는 점 Q 의 자취의 방정식은?

① $y = -x - 8$ ② $y = -3x + \frac{8}{3}$ ③ $y = \frac{3}{5}x - \frac{8}{5}$
④ $y = 3x - \frac{8}{3}$ ⑤ $y = 3x - 3$

해설

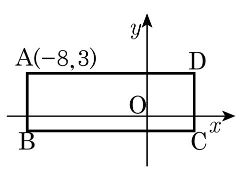
점 P$(a,\ 3a + 1)$라 하고, Q$(x,\ y)$ 라 하면

$x = \frac{2a + 1 \times 3}{2 + 1},\ y = \frac{2(3a + 1) + 1 \times (-1)}{2 + 1}$

$\therefore x = \frac{2a + 3}{3}\ ,\ y = \frac{6a + 1}{3}$

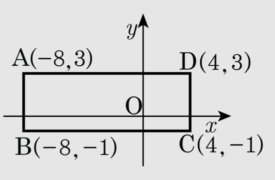
여기서 a를 소거하면 $y = 3x - \frac{8}{3}$

5. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 A(−8, 3), B, C, D를 꼭지점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이는 32이고, 가로의 길이는 세로 길이의 세 배일 때, 점 B 와 D 를 지나는 직선의 방정식은? (단, 각 변은 축에 평행하다.)



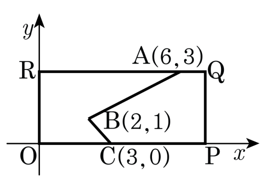
① $y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}$ ② $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ ③ $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
④ $y = \frac{1}{4}x + \frac{4}{3}$ ⑤ $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{3}$

해설



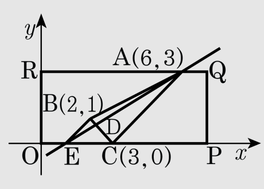
세로의 길이가 a라 하면 가로의 길이는 $3a$이다.
$8a = 32$에서 $a = 4$
가로의 길이는 12, 세로의 길이는 4이므로
D(4,3)이고, 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.
따라서 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{3}(x - 4) + 3$
따라서 $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

6. $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$는 직사각형 OPQR을 두 부분으로 나누는 경계선이다. 이 경계선을 두 부분의 넓이의 변화 없이 점 A를 지나는 직선으로 바꿀 때, 이 직선의 기울기는?



① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{1}{2}$　　③ $\frac{3}{5}$　　④ $\frac{3}{4}$　　⑤ $\frac{5}{6}$

해설



$\overline{AC}$와 평행한 보조선 $\overline{BE}$를 긋는다.

$\overline{AC} \,//\, \overline{BE}$이므로 $\triangle ABC = \triangle AEC$,

$\triangle ABD = \triangle CDE$

따라서 $\overline{AE}$가 직선 경계임을 알 수 있다.

(직선 AC의 기울기)$=$ (직선 BE의 기울기)$= 1$

점 B(2, 1)을 지나고 기울기 1인 직선의 방정식은

$y = x - 1$이고 E(1, 0)임을 알 수 있다.

$\therefore$ (직선 AE 의 기울기)$= \frac{3}{5}$

7. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y+2+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $d(k)$ 라 할 때, $d(k)$ 의 최댓값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x-y+2+k(x+y)=0$ 을 정리하면

$(1+k)x+(k-1)y+2=0$

원점에서 이 직선까지의 거리 $d(k)$ 는

$d(k)=\frac{|2|}{\sqrt{(1+k)^2+(k-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2+2}}$

따라서 $d(k)$ 는 분모 $\sqrt{2k^2+2}$ 가 최소일 때,

즉 $k=0$ 일 때 최대가 되므로 $d(k)$ 의

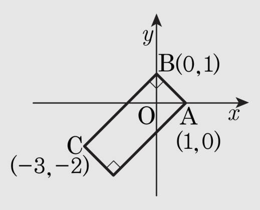
최대값은 $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

8. $x,\ y$ 에 대한 방정식 $xy+x+y-1=0$ 을 만족시키는 정수 $x,\ y$ 를 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$ 로 나타낼 때, 이 점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이는?

① 2　　② 6　　③ 8　　④ $3\sqrt{2}$　　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

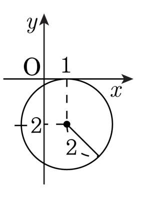
$xy+x+y-1=0$ 에서 $(x+1)(y+1)=2\cdots$㉠ 이고,$x,\ y$ 는 정수이므로
㉠ 을 만족하는 정수해를 순서쌍으로 나타내면 $(0,\ 1),\ (1,\ 0), (-2,-3),\ (-3,-2)$ 이다.
네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같다.



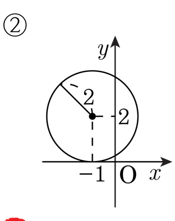
사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고 넓이는
$\overline{AB}\times\overline{BC}=\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6$

9. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?

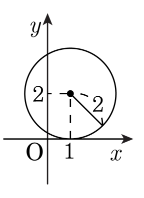
①



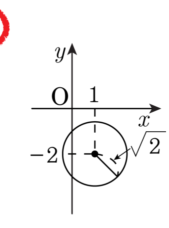
②



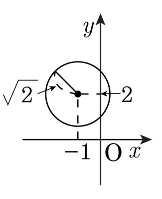
③



④



⑤



해설

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$

$\therefore$ 중심은 $(1, -2)$ 이고, 반지름은 $\sqrt{2}$

10. 점 A(6, 0) 과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P 를 이은 선분 AP 의 중점의 자취의 길이는?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

원 위의 점을 P$(a,\ b)$,
선분 AP 의 중점을 M$(x,\ y)$ 라 하면,
$x=\dfrac{6+a}{2},\ y=\dfrac{b}{2}$
$\therefore\ a=2(x-3),\ b=2y\ \cdots$ ㉠
이 때, 점 P$(a,\ b)$ 가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=4\ \cdots$ ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,
$4(x-3)^2+4y^2=4$
$\therefore\ (x-3)^2+y^2=1$
따라서 선분 AP 의 중점 M 은 중심이 (3, 0) 이고,
반지름의 길이가 1 인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 길이는
$\therefore\ 2\pi\cdot 1=2\pi$

11. 두 원 $x^2+y^2-2x+2my+m^2-7=0$, $x^2+y^2-2mx+2y+m^2-9=0$ 가 직교할 때 m값을 구하면?

① $-4,\ 2$　　② $-4, -2$　　③ $4, -2$

④ $2,\ \sqrt{2}$　　⑤ $-2,\ \sqrt{2}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로

$(x-1)^2+(y+m)^2=8$

$(x-m)^2+(y+1)^2=10$

두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을 이루므로

$(m-1)^2+(m-1)^2=18$, $(m-1)^2=9$, $m-1=\pm 3$

$m=4, -2$

12. 두 원 $x^2+y^2=1,\ x^2+(y-2)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y=ax+b$ 까지의 거리가 반지름과 같으면 되므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \Longleftrightarrow b^2=a^2+1\cdots①$$

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \Longleftrightarrow (b-2)^2=4(a^2+1)\cdots②$$

①, ② 에서 $b^2 \geq 1$ 임을 유의하면

$b=-2,\ a^2=3$

따라서 $a^2+b^2=7$

해설

중심 $\mathrm{C}_1(0\ ,0)$ 과 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|a\cdot 0-1\cdot 0+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}$

반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1\ ,\ |b|=\sqrt{a^2+1}$

$\therefore\ b^2=a^2+1\cdots\cdots①$

중심 $\mathrm{C}_2\ (0,2)$ 와 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는

$\dfrac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1=2}}\ ,\ |b-2|=2\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^2-4b=4a^2\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times\, 4-$ ㉡ 에서

$3b^2+4b-4=0\ ,\ (3b-2)(b+2)=0$

$\therefore\ b=\dfrac{2}{3},\ -2$

이 때 $b^2=a^2+1\geq 1$ 에서 $b=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=3$

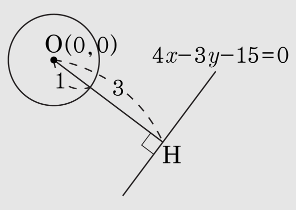
$\therefore a^2+b^2=3+4=7$

13. 직선 $4x-3y-15=0$ 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 이르는 거리의 최대값을 m, 최소값을 n 이라 할 때, $m-n$ 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

원의 중심 O(0, 0) 에서 직선 $4x-3y-15=0$ 에 이르는 거리는



$$\frac{|-15|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$$

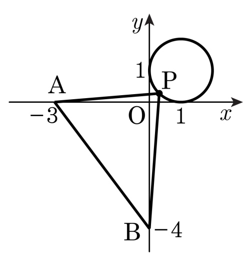
따라서 직선에서 원에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은

(최댓값)$=\overline{\mathrm{OH}}+$(반지름의 길이)$=3+1=4$

(최솟값)$=\overline{\mathrm{OH}}-$(반지름의 길이)$=3-1=2$

$\therefore\ m-n=4-2=2$

14. 다음 그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 위의 임의의 점 P 와 두 점 $A(-3, 0)$, $B(0, -4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP 의 넓이의 최솟값은?



① $\frac{21}{5}$ ② $\frac{31}{5}$ ③ 7
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

$\triangle$ABP 의 넓이가 최소이려면 $\triangle$ABP 의 높이,
즉 점 P 에서 직선 AB 에 이르는 거리가 최소이어야 한다.

이때, $\overline{AB}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

직선 AB 의 방정식은 $y=-\frac{4}{3}x-4$,

즉, $4x+3y+12=0$ 이고, 원의 중심 $(1, 1)$ 에서 직선 AB 에 이르는 거리는

$\frac{|4+3+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{19}{5}$ 이므로

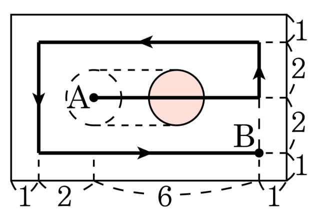
점 P 에서 직선 AB 에 이르는 거리의 최솟값은

$\frac{19}{5}-1=\frac{14}{5}$

따라서, $\triangle$ABP 의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{14}{5}=7$

15. 가로의 길이가 10, 세로의 길이가 6 인 오른쪽 그림과 같은 직사각형의 내부에서 반지름의 길이가 1 인 원이 지나간 자리에는 형광 페인트가 칠해진다고 한다. 원의 중심이 그림과 같이 A 부터 B 까지 화살표 방향의 경로를 따라 움직일 때, 직사각형의 영역 중 형광 페인트가 칠해지지 않는 부분의 넓이는? (단, 경로를 구성하는 모든 선분은 직사각형의 변에 평행하거나 수직이다.)

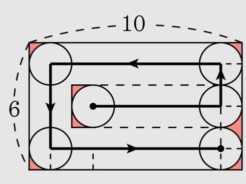


① 0 ② $10-\frac{5}{2}\pi$ ③ $8-2\pi$

④ $6-\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $4-\pi$

해설

반지름의 길이가 1 인 원이 화살표 방향을 따라 이동할 때 지나지 않는 부분은 다음 그림에서 어두운 부분이다.



따라서 그 넓이는 한 변의 길이가 2 인 정사각형에서 반지름의 길이가 1 인 원을 제외한 부분의 넓이의 2 배와 같다.

즉 $2(4-\pi)$

16. 두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1,\ (x-2)^2+(y-5)^2=1$ 은 직선 l 에 대하여 서로 대칭이다. 직선 l 의 방정식은?

① $y=-2x+3$　② $y=-x+2$　③ $y=x+3$

④ $y=-x+3$　⑤ $y=2x-1$

해설

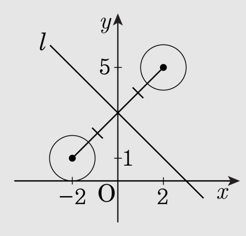
두 원의 중심 $(-2,\ 1),\ (2,\ 5)$ 는 직선 l 에 대하여 대칭이므로 직선 l 은 두 원의 중심을 연결한 선분의 수직이등분선이다.

따라서 직선l 의 방정식을 $y=ax+b$ 라 하면

ⅰ) 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{5-1}{2-(-2)}=1$ 이므로

$a=-1$

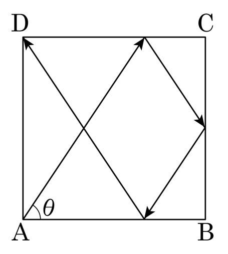


ⅱ) 두 원의 중심을 연결한 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+2}{2},\dfrac{5+1}{2}\right)$ 에서 $(0,3)$ 이므로 $b=3$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-x+3$ 이다.

17. 다음 그림과 같이 정사각형 ABCD 의 꼭짓점 A 에서 발사된 빛이 꼭짓점 D 로 들어올 때, $\tan\theta$ 의 값은? (단, 입사각과 반사각은 같다.)

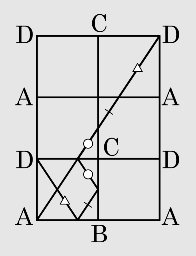


① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 2

해설

다음 그림에서 정사각형 ABCD 의 꼭짓점 A 에서 발사된 빛이 그림과 같이 꼭짓점 D 에 들어올 때 $\tan\theta$ 의 값은 $\frac{3}{2}$ 이다.



18. 빈이의 주머니에 $0,\ 1,\ 2$의 숫자가 적힌 카드가 들어 있고, 혜교의 주머니에는 $1,\ 2,\ 3$의 숫자가 적힌 카드가 들어있다. 둘이서 카드를 하나씩 꺼낼 때, 두 숫자를 곱하여 생기는 숫자들을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$

해설

빈이의 주머니에 들어 있는 숫자 $0,\ 1,\ 2$를 하나씩 차례로 혜교의 카드 $1,\ 2,\ 3$에 곱하면

$0 \times 1 = 0,\ 0 \times 2 = 0,\ 0 \times 3 = 0$

$1 \times 1 = 1,\ 1 \times 2 = 2,\ 1 \times 3 = 3$

$2 \times 1 = 2,\ 2 \times 2 = 4,\ 2 \times 3 = 6$ 이다.

여기서 생기는 숫자는 모두 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$이므로 원소나열법으로 나타내면 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$ 이다.

19. 집합 $A=\{\varnothing,\ 2,\ 4,\ \{2,\ 4\}\}$일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① $\varnothing \in A$　② $\varnothing \subset A$　③ $\{2,\ 4\} \subset A$

④ $\{2,\ 4\} \notin A$　⑤ $\{\{2,\ 4\}\} \not\subset A$

해설

④ $\{2,\ 4\} \in A$

⑤ $\{\{2,\ 4\}\} \subset A$

20. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

(1) $B \subset A$ (2) B 의 원소의 개수는 3 개 이하이다.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 42 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

원소의 개수가 3 이하인 집합 A 의 부분집합은 다음과 같다.

원소가 0 개인 부분집합 : $\varnothing$

원소가 1 개인 부분집합 :

$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{6\},\ \{12\}$

원소가 2 개인 부분집합 :

$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{1,\ 6\},\ \{1,\ 12\},$
$\{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{2,\ 6\},\ \{2,\ 12\},\ \{3,\ 4\},$
$\{3,\ 6\},\ \{3,\ 12\},\ \{4,\ 6\},\ \{4,\ 12\},\ \{6,\ 12\}$

원소가 3 개인 부분집합 :

$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 2,\ 12\},$
$\{1,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 12\},\ \{1,\ 4,\ 6\},$
$\{1,\ 4,\ 12\},\ \{1,\ 6,\ 12\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\{2,\ 3,\ 6\},$
$\{2,\ 3,\ 12\},\{2,\ 4,\ 6\},\{2,\ 4,\ 12\},\{2,\ 6,\ 12\},$
$\{3,\ 4,\ 6\},\{3,\ 4,\ 12\},\{3,\ 6,\ 12\},\{4,\ 6,\ 12\}$

21. 13^n (n 은 자연수) 의 일의 자리 수의 모임을 집합 A 라 할 때, 집합 A 의 부분집합의 개수를 a, 집합 A 의 원소의 합을 b 라 하면 $a+b$ 의 값은?

① 30　② 34　③ 36　④ 38　⑤ 40

해설

13 의 거듭제곱의 일의 자리 수는
3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, $\cdots$ 로 반복된다.
그러므로 집합 $A = \{3,\ 9,\ 7,\ 1\}$ 이다.
$\therefore\ a = 2^4 = 16,\ b = 3+9+7+1 = 20$
$\therefore\ a+b = 36$

22. 두 집합 $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, $B = \{a,\ d\}$에 대하여 다음을 만족하는 집합 X를 모두 구해보고 그 개수를 구하여라.

$B \subset X \subset A,\ B \neq X$

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 7개

해설

집합 X는 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$의 부분집합 중 a, d를 항상 원소로 갖는 집합이고 B가 아니므로

$\{a,\ b,\ d\}$, $\{a,\ c,\ d\}$, $\{a,\ d,\ e\}$, $\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $\{a,\ b,\ d,\ e\}$, $\{a,\ c,\ d,\ e\}$, $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$의 7개이다.

23. 집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1,\ 3,\ 5\}$ 에서 $A \star B = (A - B) \cup (B - A)$ 라 약속할 때, 집합 $(A \star B) \star C$ 의 원소의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1,\ 2\}$, $C = \{1,\ 3,\ 5\}$ 에서
$A \star B = (A - B) \cup (B - A) = \{3, 4\} \cup \varnothing = \{3, 4\} = D$ 라 하면

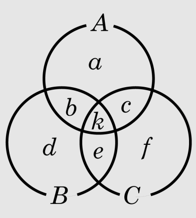
$$\begin{aligned}(A \star B) \star C &= D \star C \\ &= (D - C) \cup (C - D) \\ &= \{4\} \cup \{1, 5\} = \{1, 4, 5\}\end{aligned}$$

원소의 합은 $1 + 4 + 5 = 10$

24. 집합 $X,\ Y$ 에 대하여 연산 ★ 를 $X★Y=(X\cup Y)-(X\cap Y)$ 로 정의하고, 세 집합 $A,\ B,\ C$ 가 $n(A\cup B\cup C)=45$, $n(A★B)=18$, $n(B★C)=22$, $n(C★A)=24$ 를 만족할 때, $n(A\cap B\cap C)$ 의 값을 구하면?

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설



$n(A\cap B\cap C)=k$

$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+d+e+f+k$

$=45\ \cdots$ ㉠

$n(A★B)=a+c+d+e=18\ \cdots$ ㉡

$n(B★C)=b+d+c+f=22\ \cdots$ ㉢

$n(C★A)=a+b+e+f=24\ \cdots$ ㉣

㉡ + ㉢ + ㉣ $=2(a+b+c+d+e+f)=64$

$\therefore\ a+b+c+d+e+f=32\ \cdots$ ㉤

㉤을 ㉠에 대입하면 $\therefore\ k=13$

25. 집합 P 의 부분집합의 개수를 $s(P)$ 로 정의한다. 세 집합 A, B, C 에 대하여 다음과 같은 관계가 성립할 때, $A \cap B \cap C$ 의 원소의 개수를 구하여라.

(가) $A - B = B - C = C - A$ (나) $s(A) \cdot s(B) \cdot s(C) = 64$

▶ 답: ＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 2개

해설

$A - B = B - C = C - A$ 이면 $A = B = C$ 이므로
$n(A) = n(B) = n(C) = k$,
$s(A) \cdot s(B) \cdot s(C) = 64$,
$\rightarrow 2^k \times 2^k \times 2^k = 64$,
$\rightarrow k = 2$,
따라서 $n(A \cap B \cap C) = n(A) = n(B) = n(C) = 2$

26. 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ 의 부분집합 중에는 어떤 원소도 다른 원소의 3 배가 아닌 수들로만 이루어진 것이 있다. 이와 같은 부분집합의 원소의 개수의 최댓값은?

① 50 개 ② 66 개 ③ 67 개 ④ 76 개 ⑤ 78 개

해설

문제의 조건을 만족하는 부분집합을 A 라 하자. 어떤 양의 정수 $b(\le 100)$ 가 A 에 속한다면 $3b$ 는 A 에 속할 수 없다. $3b$ 가 A 에 속하지 않으므로, 이것의 3 배수인 $9b$ 는 A 에 속하여도 된다. 그러나 다시 이것의 3 배수인 $27b$ 는 A 에 속할 수 없다. 또, $27b$ 가 A 에 속하지 않으므로 이것의 3 배수인$81b$ 는 A 에 속한다. 이 과정을 간단히 알아보면 $b \in A \to 3b \notin A \to 9b \in A \to 27b \notin A \to 81b \in A$ 와 같이 된다.
결국 A 의 원소의 개수가 가장 많은 경우 1 부터100 까지의 정수에서 3 의 배수는 제외하고, 9 의 배수 중에서 27 의 배수는 제외시키고, 81 의 배수는 포함시킨다. 1 부터 100 까지의 정수에서 3 의 배수가 아닌 것은 $100 - 33 = 67$ (개), 9 의 배수 중에서 27 의 배수가 아닌 것은 $11 - 3 = 8$ (개), 81 의 배수는 1 (개).
따라서 구하는 최대값은 $67 + 8 + 1 = 76$

27. 두 조건 p, q를 만족시키는 집합 $P = \{x \mid a < x < a+1\}$, $Q = \left\{x \,\middle|\, x + \frac{1}{x} \le -2\right\}$ 에 대하여 $p \to q$를 참이 되게하는 실수 a의 최댓값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(i) $x < 0$ 이면

$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \le 0$

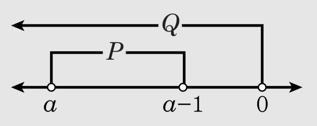
$\therefore \ x + \frac{1}{x} \le -2$

(ii) $x > 0$ 이면

$x + \frac{1}{x} \ge 2$ 이므로 Q 를 만족시키지 못한다.

(i), (ii) 에 의하여 $Q = \{x | x < 0\}$

$\therefore \ P \subset Q$ 에서 $a + 1 \le 0,\ a \le -1$



따라서, $p \to q$를 참이 되게 하는 실수 a의 최댓값은 -1 이다.

28. 임의의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a^2+b^2+c^2)^2 \le n(a^4+b^4+c^4)$을 만족하는 최소의 양의 정수 n을 구하면?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$x=a^2,\ y=b^2,\ z=c^2$ 이라 하면

$(x-y)^2 \ge 0,\ (y-z)^2 \ge 0,\ (x-z)^2 \ge 0$ 이므로

$x^2+y^2 \ge 2xy,\ y^2+z^2 \ge 2yz,\ z^2+x^2 \ge 2zx$

$\therefore\ (x+y+z)^2$

$= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$= x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)$

$= 3(x^2+y^2+z^2)$

$\therefore\ (a^2+b^2+c^2)^2 \le 3(a^4+b^4+c^4)$ (단, 등호는 $a=\pm b=\pm c$ 일 때 성립한다.)

29. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=4$가 성립할 때, 실수 c의 최솟값과 최댓값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$a+b+c=2 \Rightarrow a+b=2-c$

$a^2+b^2+c^2=4 \Rightarrow a^2+b^2=4-c^2$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

$2(4-c^2) \geq (2-c)^2$

$8-2c^2 \geq 4-4c+c^2$

$3c^2-4c-4 \leq 0$

$(c-2)(3c+2) \leq 0,$

$-\frac{2}{3} \leq c \leq 2$

$\therefore$ c의 최댓값 : 2, 최솟값 : $-\frac{2}{3}$

합 : $2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$