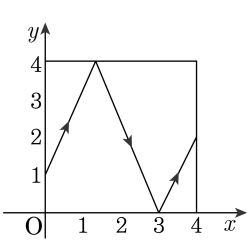


1. 점 (0, 1)에서 출발한 빛이 그림과 같이 정사각형의 변에서 두 번 반사되어 점 (4, 2)에 도달하였을 때, 빛이 이동한 거리를 구하여라. (단, 입사각과 반사각은 같다)



▶ 답 :

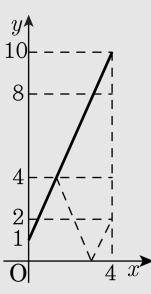
▷ 정답 : $\sqrt{97}$

해설

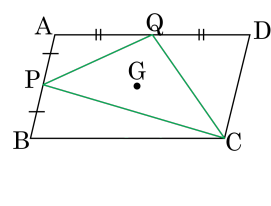
빛이 이동한 거리는 대칭성을 이용하면 그림과 같이 두 점 (0, 1) 과 (4, 10) 사이의 거리임을 알 수 있다.

따라서 빛이 이동한 거리는

$$\sqrt{(4-0)^2 + (10-1)^2} = \sqrt{97} \text{이다.}$$



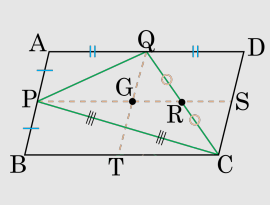
2. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 변 AB, AD의 중점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 A, C의 좌표가 각각 $A(a, b), C(c, d)$ 이고, 삼각형 PCQ의 무게중심 G의 좌표가 (4, 1)일 때, $a + b + c + d$ 의 값은?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

위 그림과 같이 $\overline{PG}$ 의 연장선이 $\overline{QC}, \overline{DC}$ 와 만나는 점을 각각 R, S라 하고



$\overline{QG}$ 의 연장선이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 T라 하면

$\overline{AD} \parallel \overline{PS}$ 이므로 점 S는 선분 DC의 중점이고

$\overline{QT} \parallel \overline{DC}$ 이므로 점 T는 선분 BC의 중점이다.

따라서 $\overline{PG} : \overline{GR} = 2 : 1, \overline{GR} : \overline{RS} = 1 : 1$ 이므로 점 G는

선분 PS의 중점이다.

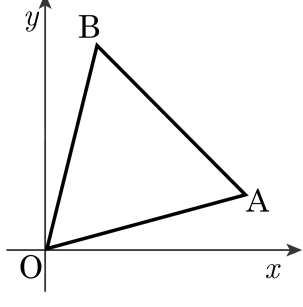
따라서 점 G는 대각선 AC의 중점이고 선분 AC의 중점의 좌표

는 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{a+c}{2} = 4, \frac{b+d}{2} = 1 \text{ 에서 } a+c = 8, b+d = 2$$

$$\therefore a+b+c+d = 8+2 = 10$$

3. 좌표평면 위에서 세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 1)$, $B(1, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 에 대하여 선분 AB 를 $1 : 2$ 로 외분하는 점을 C , 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점을 D 라 하자. 두 삼각형 OCB , OAD 의 무게중심을 각각 G_1 , G_2 라 할 때, 선분 G_1G_2 의 길이는?



- ① $2\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

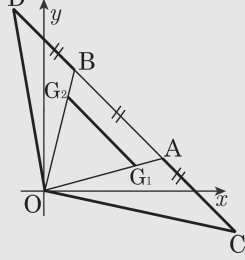
해설

선분 OA 는 삼각형 OCB 의 중선이므로
삼각형 OCB 의 무게중심 G_1 은
선분 OA 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.
마찬가지로 삼각형 OAD 의 무게중심
 G_2 는 선분 OB 를 $2 : 1$ 로 내분하는
점이다.
이때 $\triangle OG_1G_2 \sim \triangle OAB$ 이고 그 닮음
비가 $2 : 3$ 이므로 선분 G_1G_2 의 길이는

선분 AB 의 길이의 $\frac{2}{3}$ 이다.

$\therefore$ 구하는 선분의 길이는

$$\frac{2}{3} \sqrt{(4-1)^2 + (1-4)^2} = 2\sqrt{2}$$



4. 좌표평면 위에 있는 세 점 A(2, 10), B(-8, -14), C(10, 4)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, D의 좌표는?

- ① D(5, 1) ② D(5, -1) ③ D(-5, 1)
 ④ D(-5, -1) ⑤ D(2, -3)

해설

다음 그림과 같이 $\overline{AD}$ 가 각의 이등분선일 때,

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.

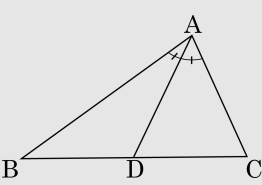
$\overline{AB} = 26$, $\overline{AC} = 10$ 이고

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이므로

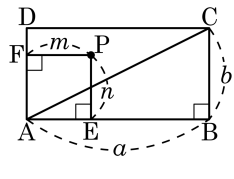
D는 $\overline{BC}$ 를 13 : 5로 내분하는 점이다.

$$D\left(\frac{13 \times 10 + 5 \times (-8)}{13 + 5}, \frac{13 \times 4 + 5 \times (-14)}{13 + 5}\right)$$

$\therefore D(5, -1)$



5. $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ 인 직사각형 ABCD 에서 그림과 같이 삼각형 ACD 의 내부에 점 P 를 잡고, 점 P 에서 변 AB, AD 에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 하자. $\overline{PE} = n$, $\overline{PF} = m$ 일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

㉠ $\frac{n}{m} < \frac{b}{a}$ ㉡ $\frac{n}{m} < \frac{b-m}{a-m}$ ㉢ $\frac{b-m}{a-m} < \frac{b}{a}$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\frac{n}{m}$ 은 직선 AP 의 기울기,
 $\frac{b}{a}$ 는 직선 AC 의 기울기,
 $\frac{b-n}{a-m}$ 은 직선 PC 의 기울기이다.
 따라서 $\frac{b-n}{a-m} < \frac{b}{a} < \frac{n}{m}$

7. $\triangle ABC$ 의 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 각각 $P(3, 4)$, $Q(4, -1)$, $R(6, 1)$ 이라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 18 ② 24 ③ 30 ④ 32 ⑤ 36

해설

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 로 놓으면
 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점은 각각
 $P(3, 4)$, $Q(4, -1)$, $R(6, 1)$ 이므로
이것을 풀면, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 7$
 $y_1 = 6$, $y_2 = 2$, $y_3 = -4$
 $\therefore \triangle ABC =$
 $\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$
 $= \frac{1}{2}|5(2 - (-4)) + 1((-4) - 6) + 7(6 - 2)|$
 $= 24$

해설

$\triangle ABC$ 의 넓이는 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의
중점을 이어 만든 $\triangle PQR$ 의 넓이의
4배임을 이용한다.

8. xy 평면 위의 세 개의 직선 $l_1 : x - y + 2 = 0, l_2 : x + y - 14 = 0, l_3 : 7x - y - 10 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원의 중심이 (a, b) , 반지름이 r 일 때, $a + b + r^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

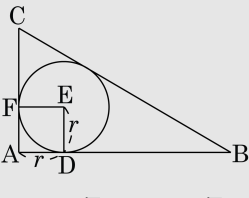
해설

세 직선의 교점을 각각 A, B, C 라 하자. 세 직선 중 두 개의 직선을 각각 연결하여 세 점의 좌표를 구한다.

$$A = (6, 8) \quad B = (2, 4) \quad C = (3, 11)$$

$$\overline{AB} = 4\sqrt{2}, \overline{BC} = 5\sqrt{2}, \overline{CA} = 3\sqrt{2}$$

즉, $\angle CAB = 90^\circ$ 인 직각 삼각형이다.



$$\Rightarrow 3\sqrt{2} - r + 4\sqrt{2} - r = 5\sqrt{2} \therefore r = \sqrt{2}$$

$\therefore$ 점 D는 $\overline{AB}$ 의 1 : 3 의 내분점이므로,

$$D = \left(\frac{2+18}{4}, \frac{4+24}{4} \right) = (5, 7)$$

점 F 는 $\overline{AC}$ 의 1 : 2 의 내분점이므로,

$$F = \left(\frac{3+12}{3}, \frac{11+16}{3} \right) = (5, 9)$$

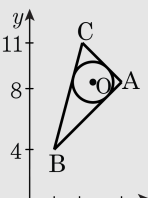
$\square ADEF$ 는 정사각형이므로 $\overline{AF} \parallel \overline{DE}$ 이다.

점 A 에서 점 F 로의 이동이 x 축으로 -1 , y 축으로 $+1$ 만큼 평행이동이고,

점 D 에서 점 E 로의 이동도 마찬가지이다.

$$\therefore E = (5-1, 7+1) = (4, 8) \Rightarrow a+b+r^2 = 4+8+(\sqrt{2})^2 = 14$$

해설



직선들의 세 교점을 각각 A, B, C 라고 하고 이들의 좌표를 구해보면 A(6, 8), B(2, 4), C(3, 11)

원의 중심의 좌표 O(a, b) 이므로

$$2 < a < 6, 4 < b < 11 \dots \textcircled{1}$$

원의 중심으로부터 각 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+b-14|}{\sqrt{2}} = \frac{|7a-b-10|}{5\sqrt{2}} = r \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $\textcircled{1}$ 의 조건을 만족시키는 a, b 의 해는

$$a = 4, b = 8 \text{ 이고}$$

$$\text{다시 } \textcircled{2} \text{에 대입하면, } r = \sqrt{2}, \therefore a+b+r^2 = 14$$

9. 두 점 A (1,1), B (7,4) 에서 이르는 거리의 비가 2 : 1 인 임의의 점 P 에 대하여 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대일 때, $\tan (\angle PAB)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

점 P 의 자취는 선분 AB 를 2 : 1 로
내분하는 점 C 와 2 : 1 로 외분하는 점
D 를

지름의 양 끝으로 하는 원이다.

점 C 의 좌표는

$$\left(\frac{14+1}{2+1}, \frac{8+1}{2+1} \right), \text{ 즉 } C(5,3)$$

점 D 의 좌표는

$$\left(\frac{14-1}{2-1}, \frac{8-1}{2-1} \right) \text{ 즉, } D(13,7)$$

따라서, CD 의 중점 M 의 좌표는

$$\left(\frac{5+13}{2}, \frac{3+7}{2} \right)$$

즉, M (9,5) 이므로

$$\overline{CM} = \sqrt{(9-5)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서, 점 P 의 자취는 중심의 좌표가

(9,5) 이고 반지름의 길이가

$2\sqrt{5}$ 인 원이므로 자취의 방정식은

$$(x-9)^2 + (y-5)^2 = 20$$

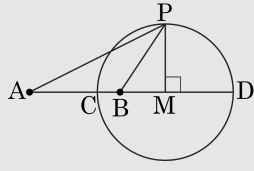
그런데 다음 그림에서 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대인

경우는 선분 AM 과 선분 PM 이 수직인 경우이다.

$$\text{이 때, } \overline{AM} = \sqrt{(9-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\overline{PM} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\tan (\angle PAB) = \tan (\angle PAM) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

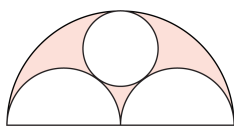


10. 두 점 A(-8, -2), B(2, 8) 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 27$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle ABC$ 의 무게 중심 G 는 어떻게 움직이는가?
- ① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ② $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$
③ $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 2$ ④ $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 3$
⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

해설

$P(a, b) \ a^2 + b^2 = 27$
무게중심 $G(x, y) = \left(\frac{-8+2+a}{3}, \frac{-2+8+b}{3} \right)$
 $\qquad\qquad\qquad = \left(\frac{a-6}{3}, \frac{b+6}{3} \right)$
 $X = \frac{a-6}{3}, \ Y = \frac{b+6}{3}$
 $a = 3X+6, \ b = 3Y-6 \ a^2 + b^2 = 27$ 에 대입하면,
 $(3X+6)^2 + (3Y-6)^2 = 27$
 $\therefore (X+2)^2 + (Y-2)^2 = 3$
따라서 $G(X, Y)$ 의 자취는 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 3$

11. 다음 그림과 같이 어떤 큰 반원의 지름 위에 두 개의 합동인 반원이 각각 서로 접하고 또 작은 한 원이 이 세 반원 모두에 접하면서 놓여있다. 이들 사이의 어두운 부분의 넓이가 20π 라 할 때, 합동인 두 반원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

합동인 두 원의 반지름을 r ,

작은 원의 반지름을 x 라 하자.

$$\overline{AB} = r + x, \overline{BO} = r, \overline{CO} = r, \overline{AO} = 2r - x$$

$$\triangle ABO \text{ 에서 } r^2 + (2r - x)^2 = (r + x)^2$$

$$4r^2 - 6rx = 0$$

$$\Rightarrow 2r(2r - 3x) = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}r \quad \dots \text{ ①}$$

빛금 친 부분의 넓이를 r, x 로 나타내면,

$$\frac{1}{2} \times \pi \times (2r)^2 - \frac{1}{2} \times \pi \times r^2 \times 2 - \pi x^2 = 20\pi$$

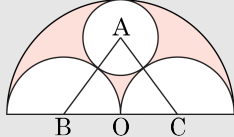
$$\Rightarrow r^2 - x^2 = 20 \quad \dots \text{ ②}$$

① 을 ② 에 대입시키면,

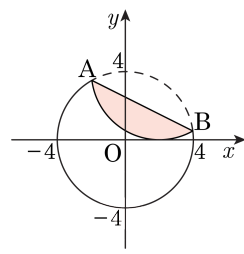
$$r^2 - \left(\frac{2}{3}r\right)^2 = 20$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}r^2 = 20$$

$$\Rightarrow r = 6 \quad (\because r > 0)$$



12. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 현 AB 를 접는 선으로 하여 접었을 때, 호 AB 가 x 축과 점 (2, 0) 에서 접한다. 이 때, 직선 AB 의 방정식을 구하여라.



- ① $x + 2y - 4 = 0$ ② $x + 2y - 5 = 0$
 ③ $2x + y - 6 = 0$ ④ $2x + y - 5 = 0$
 ⑤ $2x + y - 4 = 0$

해설

다음 그림과 같이 호 AB 를 일부분으로 하는 원을 그리면, 새로운 원은 반지름의 길이가 4 이고,

x 축과 점 (2, 0) 에서 접하므로

중심의 좌표가 (2, 4) 가 된다.

즉, 새로운 원의 방정식은

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$$

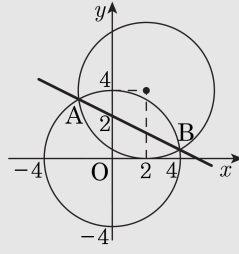
이 때, 선분 AB 는 두 원의 공통현이므로 직선 AB 의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 16) - (x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4) = 0$$

$$4x + 8y - 20 = 0$$

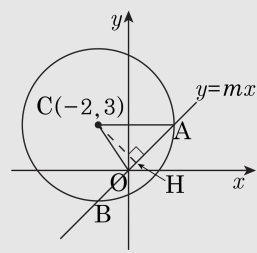
$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$



13. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 $C(-2, 3)$ 에서
직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\begin{aligned}\Delta CAH \text{에서 } \overline{AH}^2 &= \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2 \\ &= 25 - \overline{CH}^2\end{aligned}$$

따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$ 가 최소이다.

$$\Delta\text{COH} \text{에서 } \overline{\text{CH}}^2 = \overline{\text{CO}}^2 - \overline{\text{OH}}^2$$

$\overline{CH}$ 가 최대가 되기 위해서는

$\overline{CH} = \overline{CO} \ (\overline{OH} = 0)$ 일 때이므로

$$\overline{CO} \perp \overline{AB}$$

직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$

14. 한 점 $P(a, b)$ 에서 두 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 와 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 인 점 $P(a, b)$ 의 자취를 구하면?

- ① $2a - 3b - 7 = 0$ ② $2a - 3b + 7 = 0$
 ③ $a^2 + b^2 = 3$ ④ $a^2 + b^2 = 4$
 ⑤ $a^2 + b^2 = 5$

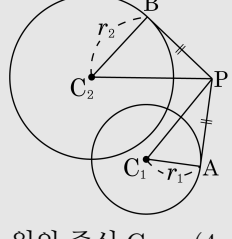
해설

$$(x-4)^2+(y+1)^2=4, (x-2)^2+(y-2)^2=9$$

문제의 조건에서

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow (\overline{PA})^2 = (\overline{PB})^2$$

$$\Rightarrow (\overline{PC_1})^2 - r_1^2 = (\overline{PC_2})^2 - r_2^2$$



원의 중심 $C_1 = (4, -1)$, $C_2 = (2, 2)$,

반지름 $r_1 = 2$, $r_2 = 3$

$$\therefore (a-4)^2 + (b+1)^2 - 4 = (a-2)^2 + (b-2)^2 - 9$$

$\therefore$ 위를 정리하면 $2a - 3b - 7 = 0$

15. 실수 x, y 가 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{17}$ ④ 16 ⑤ 28

해설

$x^2 + y^2 = k$ 인 원을 생각해보면,
두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.
 $\Rightarrow$ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = 1 + \sqrt{k} \quad \therefore k = (\sqrt{13} - 1)^2$
 $\Rightarrow$ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{k} - 1 \quad \therefore k = (\sqrt{13} + 1)^2$
 $\therefore k$ 의 합은 $(\sqrt{13} - 1)^2 + (\sqrt{13} + 1)^2 = 28$

16. 점 $(1, 2)$ 에 대한 점 (a, b) 의 대칭점을 (a', b') 이라 하고, 점 (a, b) 가 직선 $y = 3x + 1$ 위를 움직일 때, 다음 중 점 (a', b') 이 움직이는 도형 위의 점은?

- ① $(-1, 2)$ ② $(0, -1)$ ③ $(1, 0)$
④ $(2, 1)$ ⑤ $(3, 5)$

해설

$y = 3x + 1$ 위의 점 (a, b) 와 대칭점 (a', b') 의 중점이 $(1, 2)$ 이므로
 $\frac{a' + a}{2} = 1, \frac{b' + b}{2} = 2$
 $a' = 2 - a,$
 $b' = 4 - b = 3 - 3a \quad (\because b = 3a + 1)$
 $\therefore (a', b') = (2 - a, 3 - 3a)$
 $x = 2 - a, y = 3 - 3a$ 라 하고 a 를 소거하면
 $y = 3 - 3(2 - x), y = 3x - 3$
즉 (a', b') 은 직선 $y = 3x - 3$ 위를 움직인다.
 $\therefore (1, 0)$ 이 이 직선 위에 있다.

17. 직선 $y = 0$ 을 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭이동시킨 직선과 $x - y + 2 = 0$ 과의 교점을 P 라 할 때 $\overline{OP}$ 의 최솟값은? (단, O 는 원점이다.)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

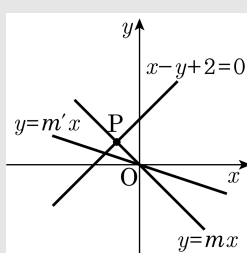
해설

직선 $y = 0$ 을 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭 이동시킨 직선을 $y = m'x$ 이라 할 때

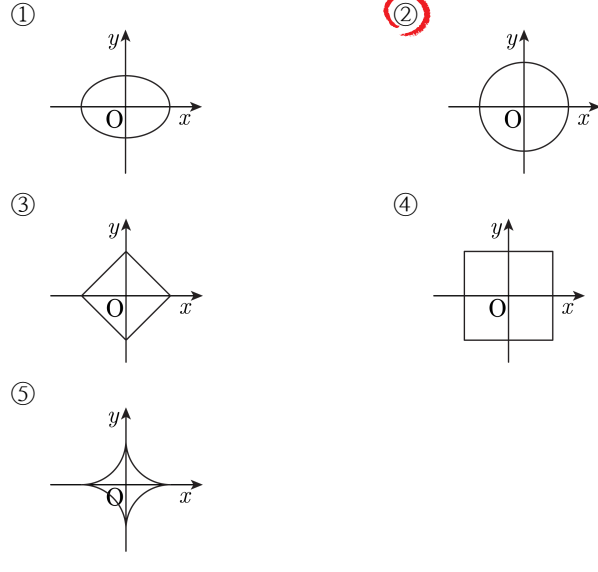
$y = m'x$ 와 $x - y + 2 = 0$ 의 교점을 P 라 하면

$\overline{OP}$ 의 최솟값은 원점에서 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 이르는 거리와 같다.

따라서 $\overline{OP}$ 의 최솟값은 $\frac{|2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$ 이다.



18. 좌표평면에서 점 $(2, 0)$ 의 직선 $y = 2mx$ 에 대한 대칭점을 P 라 한다. m 이 임의의 실수값을 가지며 변할 때, 점 P 의 자취로 가장 적절한 것은?



해설

$P = (X, Y)$ 라 하면, $(2, 0)$ 과 P 를 잇는 선분은 $y = 2mx$ 에 수직하고

점 $(2, 0)$ 과 P 의 중점은 $y = 2mx$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{Y}{X-2} \times 2m = -1, \quad \frac{Y}{2} = 2m\left(\frac{X+2}{2}\right)$$

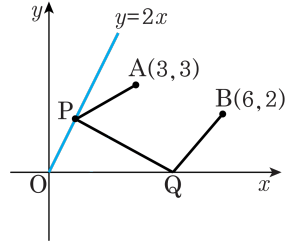
$$\Rightarrow m = \frac{2-X}{2Y} \quad \cdots \text{㉠}, \quad Y = 2mX + 4m \quad \cdots \text{㉡}$$

$\Rightarrow$ ㉠을 ㉡에 대입하면,

$$2Y^2 = -2X^2 + 4X - 4X + 8$$

$$\Rightarrow X^2 + Y^2 = 4$$

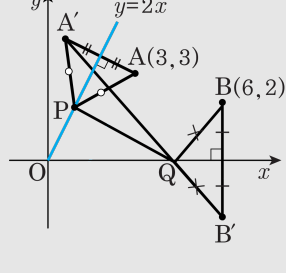
19. 좌표평면 위에 두 점 A (3,3), B (6,2) 와 직선 $y = 2x$ 위를 움직이는 점 P , x 축 위를 움직이는 점 Q 가 있다. 이때, $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은?



- ① $\frac{11\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{11\sqrt{10}}{5}$
 ③ $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{13\sqrt{10}}{5}$
 ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

다음 그림과 같이 점 A (3,3) 을 직선 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하고 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면



$$\overline{AP} = \overline{A'P}, \overline{BQ} = \overline{B'Q} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \geq \overline{A'B'}$$

따라서, 구하는 최솟값은 선분 A'B' 의 길이이다.

이때, 점 A' (a,b) 라고 하면

직선 AA' 과 직선 $y = 2x$ 가 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-3} \cdot 2 = -1$$

$$\therefore a + 2b = 9 \dots\dots \textcircled{\small{\Gamma}}$$

또한, 선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 은

직선 $y = 2x$ 위에 있으므로

$$\frac{b+3}{2} = 2 \cdot \frac{a+3}{2}$$

$$\therefore 2a - b = -3 \dots\dots \textcircled{\small{\Delta}}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{5}, b = \frac{21}{5}$$

$$\therefore A' \left(\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right)$$

한편, 점 B' (6,-2) 이므로

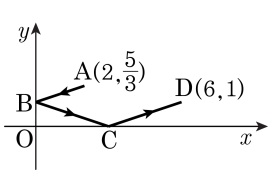
$$\overline{A'B'} = \sqrt{\left(6 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(-2 - \frac{21}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{27}{5}\right)^2 + \left(-\frac{31}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1690}{25}} = \frac{13\sqrt{10}}{5}$$

따라서, 구하는 최솟값은 $\frac{13\sqrt{10}}{5}$ 이다.

20. 좌표평면의 x 축, y 축 ($x \geq 0, y \geq 0$) 위에 두 평면 거울이 놓여있다. 빛이 점 $A(2, \frac{5}{3})$ 에서 출발하여 다음 그림과 같이 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 의 경로로 반사되어 점 $D(6, 1)$ 에 도달한다고 할 때, 점 C 의 x 좌표를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 3$

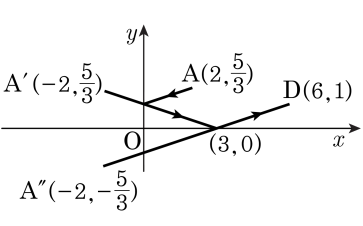
해설

A'' 와 D 를 지나는 직선의 방정식은

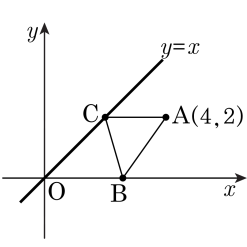
$$y = \frac{1 + \frac{5}{3}}{6 + 2}(x - 6) + 1 = \frac{1}{3}x - 1$$

점 C 의 x 좌표는 이 그래프의 x 절편이므로 3

$\therefore x = 3$



21. 다음 그림과 같이 점 A(4, 2)와 x 축과 직선 $y = x$ 위에 각각 두 점 B, C가 있다. 이때, $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이의 최솟값을 구하면?

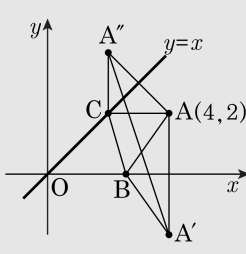


- ① $2\sqrt{5}$
 ② $2\sqrt{10}$
 ③ $3\sqrt{2}$
- ④ $3\sqrt{3}$
 ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

점 A(4, 2)를 x 축에 대칭이동한 점 A'(4, -2)와

$y = x$ 에 대칭이동한 점 A''(2, 4)를 구하여 연결하면 다음 그림에서



$$\begin{aligned}
 (\triangle ABC \text{의 둘레}) &= \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} \\
 &= \overline{A'B} + \overline{A''C} + \overline{BC} \geq \overline{A'A''}
 \end{aligned}$$

점 B와 C를 직선 A'A''이 각각 x 축과 직선 $y = x$ 와 만나는 점으로 잡을 때, $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이가 최소이다.

이 때, 최솟값은 $\sqrt{(4-2)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{10}$ 이다.

22. 자연수 전체의 집합의 부분집합 A 에 대하여 다음을 만족하는 집합 A 의 개수는? (단, $A \neq \emptyset$)

$$x \in A \Rightarrow \frac{81}{x} \in A$$

- ① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

A 는 81의 약수를 원소로 하는 집합인데
 $n(A) = 1$ 인 경우는 {9} 1개
 $n(A) = 2$ 인 경우는 {1, 81}, {3, 27} 2개
 $n(A) = 3$ 인 경우는 {1, 9, 81}, {3, 9, 27} 2개
 $n(A) = 4$ 인 경우는 {1, 3, 27, 81} 1개
 $n(A) = 5$ 인 경우는 {1, 3, 9, 27, 81} 1개
 $\therefore$ 7개

23. 집합 $A = \{\phi, 0, 1, 2, \{0, 1\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\phi \in A$

② $\phi \subset A$

③ $\{0, \{0, 1\}\} \subset A$

④ $\{1\} \in A$

⑤ $\{0, 1\} \in A$

해설

집합 A 에서 ϕ 는 원소이면서 또한 ϕ 는 모든 집합의 부분집합
이므로 $\phi \in A, \phi \subset A$ 이다.
그러나 1 은 A 의 원소이므로 $1 \in A, \{1\} \subset A$ 이어야 한다.

24. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } a^2 \text{을 } 10 \text{으로 나눈 나머지, } a \text{는 자연수}\}$ 일 때, A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 64 개

해설

제곱수의 일의 자리를 살펴보면 1^2 은 1, 2^2 은 4, 3^2 은 9, 4^2 은 6, 5^2 은 5, 6^2 은 6, 7^2 은 9, 8^2 은 4, 9^2 은 1, 10^2 은 0, 11^2 은 1, ... 이므로

$$A = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$$

따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개)이다.

25. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 의 부분집합의 열을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$ 이라 하고, A_1 의 원소의 총합을 $S(A_1)$, A_2 의 원소의 총합을 $S(A_2), \dots, A_8$ 의 원소의 총합을 $S(A_8)$ 이라 할 때, $S(A_1) + S(A_2) + \dots + S(A_8)$ 의 값은?

- ① 20
- ② 22
- ③ 24
- ④ 26
- ⑤ 28

해설

집합 A 의 부분집합을 모두 구해 보면 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ 인데, 여기서 자세히 살펴보면 1을 반드시 포함하는 경우의 집합은 4개, 2를 반드시 포함하는 경우의 집합은 4개, 3을 반드시 포함하는 경우의 집합은 4개이므로 원소의 총합은 $4(1 + 2 + 3) = 24$

26. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2m-1\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개일 때 자연수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 9

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2m-1\} \rightarrow n(A) = m$ (개)

원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개이므로

$$2^{m-2-2} = 32, m-4 = 5$$

$$m = 9$$

27. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 3, 5\}$ 이고 $A \cap B \neq \emptyset$ 일 때, 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 28개

해설

$A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 집합 B 는 적어도 A 의 원소를 한 개 이상 가지고 있는 전체집합의 부분집합이므로
(집합 B 의 갯수)
= (U 의 부분집합의 갯수) -
(A 의 원소를 포함하지 않는 U 의 부분집합의 갯수) $= 2^5 - 2^{5-3}$
 $= 2^5 - 2^2$
 $= 32 - 4 = 28$ (개)

28. 두 집합 $A = \{1, a^2, 8\}$, $B = \{2, a + 2, 3a\}$ 에서 $A - B = \{1, 8\}$ 일 때 a 의 값은? (단, a 는 자연수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

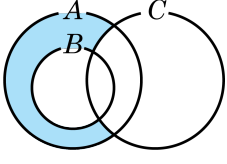
해설

$A = \{1, a^2, 8\}$, $B = \{2, a + 2, 3a\}$, $A - B = \{1, 8\}$ 이므로 $a^2 = 2$ 또는 $a^2 = a + 2$ 또는 $a^2 = 3a$ 이다.
 a 는 자연수이므로 $a^2 = 3a$ 에서 $a = 3$ 과 $a^2 = a + 2$ 에서 $a = 2$ 이다.

30. 집합 $A = \{x \mid x < 20, x \text{는 홀수인 자연수}\}$, $B = \{2x + 1 \mid x \text{은 5보다 작은 자연수}\}$,

$C = \left\{x \mid \frac{x+3}{10} = n, n \text{은 자연수}\right\}$ 일 때, 다음

벤 다이어그램의 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5 개

해설

그림에 색칠된 부분은 $A - B - C$ 인 것을 알 수 있다.

$A = \{x \mid x < 20, x \text{는 홀수인 자연수}\} =$

$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\},$

$B = \{2x + 1 \mid x \text{은 5보다 작은 자연수}\} = \{3, 5, 7, 9\},$

$C = \left\{x \mid \frac{x+3}{10} = n, n \text{은 자연수}\right\} = \{7, 17, 27, 37, 47, \dots\},$

따라서 $(A - B) - C = \{1, 11, 13, 15, 19\}$ 이고 원소의 개수는 5 개이다.

31. 집합 S 가 전체집합 U 의 부분집합들로 이루어진 집합으로 다음과 같은 3가지 성질을 만족한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

- $\supsetneq U \in S$

$\supsetneq A \in S \text{ 이면 } A^c \in S$

$\supsetneq A, B \in S \text{ 이면 } (A^c \cup B^c) \in S$

- $\textcircled{1} \phi \in S$

$\textcircled{2} A \cup B \in S$

$\textcircled{3} A \cap B \in S$
- $\textcircled{4} A - B \in S$

$\textcircled{5} B - A \notin S$

해설

$U \in S$ 이면 $\textcircled{1}$ 에 따라 $U^c = \phi \in S \therefore \textcircled{1}$ 은 참
 $A, B \in S$ 이면 $(A^c \cup B^c) \in S$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에 따라 $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B \in S \therefore \textcircled{3}$ 은 참
 $A, B \in S$ 이면 $\textcircled{2}$ 에 따라 $A^c, B^c \in S$ 이므로 $A^c \cap B^c \in S$ ($\textcircled{3}$ 이 참)이고 $\textcircled{2}$ 에 따라 $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B \in S \therefore \textcircled{2}$ 도 참
 $A, B \in S$ 이면 $\textcircled{2}$ 에 따라 $B^c \in S$ 이고 $\textcircled{3}$ 이 참이므로 $A \cap B^c = A - B \in S \therefore \textcircled{4}$ 도 참
같은 방법으로 $B - A \in S \therefore \textcircled{5}$ 는 참이 아니다.

32. 어느 학생이 x, y, z 의 평균 A 를 구하기 위하여 x, y 의 평균 C 를 먼저 구하고, C 와 z 의 평균 B 를 구하였다. 다음 중 옳은 것은?

(단, $x < y < z$)

① $B = A$

② $B < A$

③ $B > A$

④ $B \leq A$

⑤ $B \geq A$

해설

$$A = \frac{x+y+z}{3}, C = \frac{x+y}{2}$$

$$B = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

$$B - A = \frac{2z - x - y}{12} = \frac{(z - x) + (z - y)}{12} > 0$$

$$\therefore B > A$$

33. x, y 가 실수일 때, $x^2+2xy+3y^2-4x+4y+14$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 0
- ② 1
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ 2
- ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$$\begin{aligned} & x^2+2(y-2)x+3y^2+4y+14 \\ &= (x+y-2)^2-(y-2)^2+3y^2+4y+14 \\ &= (x+y-2)^2+2y^2+8y+10 \\ &= (x+y-2)^2+2(y+2)^2+2 \geq 2 \end{aligned}$$

따라서 $x=6, y=-4$ 일 때, 최솟값은 2

해설

위의 방법은 완전제곱꼴로 묶을 수 있는 특수한 경우에 사용할 수 있는 좀 더 쉬운 풀이이고 일반적인 경우의 해법은 좀 더 복잡하다.

$x^2+2xy+3y^2-4x+4y+14 \geq k$ 라고 하면

$$x^2+2xy+3y^2-4x+4y+14-k \geq 0$$

이 모든 실수 x, y 에 대해 성립하므로

x 에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 판별식을 사용하면

$$x^2+2(y-2)x+3y^2+4y+14-k \geq 0$$
$$D/4 = -2y^2-8y-10+k \leq 0$$
$$2y^2+8y+10-k \geq 0$$

이고 모든 y 에 대해 성립하는 절대부등식

이므로

$$D/4 = 16-20+2k \leq 0$$
$$\therefore k \leq 2$$

따라서 준식의 최솟값은 k 의 최댓값인 2이다.

34. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최소값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{2}{x} &= 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$

35. a, b 가 양의 상수이고, x, y 가 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 만족하면서 변할 때, $x+y$ 의 최댓값은?

- ① a^2
- ② b^2
- ③ $\sqrt{a^2 + b^2}$
- ④ $a^2 + b^2$
- ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식
 $(a^2 + b^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \geq (x + y)^2$ 은 항상 성립하므로
 $a^2 + b^2 \geq (x + y)^2 \dots\dots ①$
 $\therefore x + y \leq \sqrt{a^2 + b^2} \dots\dots ②$
①의 등호가 성립할 조건은
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이고 $\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \dots\dots ③$
또, ③의 등호는 $x + y \geq 0$ 일 때, 성립하므로
③을 풀면
 $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 이고,
 $x + y$ 의 최댓값은 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.