1. 다항식 $p(x)$는 다음 등식을 만족시킨다.

$$\frac{p(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}+\frac{d}{x-4}+\frac{e}{x-5}$$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c, d, e는 상수)

ㄱ $p(3)=3$이면 $c=3$이다.

ㄴ $p(1)=p(5)$이면 $a=e$이다.

ㄷ $b=2$이면 $p(2)=-12$이다.

ㄹ $a : bc = p(1) : p(2)p(3)$이다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

주어진 식의 양변에 $x-1$을 곱하면

$$\frac{p(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = a+\frac{b(x-1)}{x-2}+\frac{c(x-1)}{x-3}+\frac{d(x-1)}{x-4}+\frac{e(x-1)}{x-5}$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$$a=\frac{p(1)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}$$

같은 방법으로

$$b=\frac{p(2)}{1\cdot(-1)(-2)(-3)},\quad c=\frac{p(3)}{2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)},\quad d=\frac{p(4)}{3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)},\ e=\frac{p(5)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

따라서 ㄴ, ㄷ만 옳다.

2. 다음과 같은 삼차다항식 $P(x)$, $Q(x)$가 있다.

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1999$, $Q(x) = -x^3 + cx^2 + dx - 1999$

두 삼차다항식을 $x^2 - 1$로 나누면 나머지가 서로 같다고 한다. 이때, $P(1999) - Q(1999)$의 값은?

① -3998 ② -1999 ③ 0

④ 1999 ⑤ 3998

해설

$H(x) = P(x) - Q(x)$로 놓으면

$H(x)$는 $x^2 - 1$로 나누어떨어지므로

$H(x) = 2x^3 + (a-c)x^2 + (b-d)x + 3998$

$\quad = (x^2 - 1)(2x - 3998)$으로 놓을 수 있다.

($\because$ x^3의 계수가 2이고 상수항이 3998이므로 $x^2 - 1$로 나눈 몫은 $2x - 3998$이다.)

$\therefore P(1999) - Q(1999)$

$= H(1999)$

$= (1999^2 - 1)(3998 - 3998)$

$= 0$

3. x^8 을 $x+\frac{1}{2}$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $-\frac{1}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{32}$

해설

$x^8=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

$x=-\frac{1}{2}$ 를 대입하면 $R=\frac{1}{2^8}$

$x^8=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+\frac{1}{2^8}$

$x^8-\frac{1}{2^8}=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=Q(x)$

$\therefore Q\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{16}$

4. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x-3)^2(x+3)$으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$ ② $3x^2+2x-5$ ③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$
④ x^2+2x-5 ⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$f(-3)=4$
$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$
$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+a(x-3)^2$($\because$ $f(x)$는 $(x-3)^2$으로 나누어 떨어진다.
$f(x)=(x-3)^2\{(x+3)Q(x)+a\}$
$f(-3)=(-3-3)^2a=4$
$\therefore\ a=\frac{1}{9}$
$\therefore$구하는 나머지 : $\frac{1}{9}(x-3)^2$

5. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-1)^2$으로 나눌 때, 나머지를 ax^2+bx+c라 하면 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 4이므로
$f(-1)=4$
$f(x)=(x-1)^2Q(x)\cdots$ ㉠
$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
$\quad =(x+1)(x-1)^2Q'(x)+a(x-1)^2$ ($\because$ ㉠)
양변에 $x=-1$를 대입하면
$f(-1)=4a=4 \therefore a=1$
$ax^2+bx+c=a(x-1)^2=x^2-2x+1$
$\therefore\ b=-2, c=1$
$\therefore\ a+b+c=0$

해설

ax^2+bx+c를 구하는 것이 아니라 $a+b+c$를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.
$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어지므로 $f(1)=0$
$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x=1$를 대입하면
$f(1)=0+(a+b+c)=0$
$\therefore a+b+c=0$

6. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$ ② $3x-2$ ③ $3x+2$ ④ x^2-2x+1 ⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$

$f(x)=(x-2)^3B(x)+x^2-x+6$

$\quad=(x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2$

$\quad=(x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2$

즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$

$\quad=(x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2$

$f(-1)=9a-1=-1 \quad \therefore a=0$

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$

7. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때, 나머지의 상수항은?

① 4　　② 3　　③ 2　　④ 1　　⑤ 0

해설

$f(x) = (x^2+1)(x-1)g(x) + ax^2 + bx + c$로 두면 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로

$ax^2+bx+c = a(x^2+1)+bx+c-a$에서

$bx+c-a = x+1$

$\therefore\ b=1,\ c-a=1$

또, $f(1) = a+b+c = 4$이므로

$c-1+1+c=4$에서 $c=2$

8. n이 양의 정수일 때, $8^{100n}-1$을 9로 나눈 나머지는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$8=x$라 하면 $8^{100n}-1=x^{100n}-1$이고 $9=x+1$이 된다.
$x^{100n}-1$을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
$x^{100n}-1=(x+1)Q(x)+R$
양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=0$
$\therefore\ x^{100n}-1=(x+1)Q(x)$
위의 식에 $x=8$을 대입하면 $8^{100n}-1=9Q(x)$이므로 $8^{100n}-1$을 9로 나눈 나머지는 0이다.

9. 방정식 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족시키는 복소수 z는? (단, $\bar{z}$ 는 z의 켤레복소수)

① 존재하지 않는다.
② 한 개 있다.
③ 두 개뿐이다.
④ 무수히 많이 있다.
⑤ 세 개뿐이다.

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 놓으면,
$(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 에서
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2(2a-3b)=2$
$\therefore\ 2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 쌍은 무수히 많다.

10. 복소수 α 의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = i$ 일 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값을 구하면? (단, $i^2 = -1$)

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

$\alpha = a + bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$ 라 하면

$\alpha^3 = (a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = i$

$a(a^2 - 3b^2) = 0 \cdots$ ㉠

$b(3a^2 - b^2) = 1 \cdots$ ㉠

$a > 0$ 이므로 $a^2 = 3b^2$ 을 ㉡에 대입하면

$b(9b^2 - b^2) = 1,\ 8b^3 = 1$

$\therefore\ b = \frac{1}{2}$

$\therefore\ a = \sqrt{3}b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\therefore\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \sqrt{3}$

11. 복소수 α,β는 $\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$을 만족하고 $\alpha + \beta = i$이다. 이 때 $\alpha^2 + \beta^2$의 값은?

① -1　② 1　③ $1+i$　④ $1-i$　⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$\alpha + \beta = i$ 에서 $\overline{\alpha+\beta} = \overline{i}$ $\therefore$ $\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -i \cdots$ ㉠

$\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$ 에서

$\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, $\overline{\beta} = \frac{1}{\beta} \cdots$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -i$, $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -i$, $\frac{i}{\alpha\beta} = -i$

$\therefore$ $\alpha\beta = -1$

$$\begin{aligned} \therefore\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\cdot(\alpha\beta) \\ &= i^2 - 2\cdot(-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

12. $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $x = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ 이라 할 때, $3x^3+4x^2+3x+3$ 의 값을 구하면?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -7 ② -8 ③ -9 ④ -10 ⑤ -11

해설

$$x = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}i}{2}}{\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}i}{-1-\sqrt{5}i}$$

$\therefore\ x = \frac{1+2\sqrt{5}i}{3}$ $3x-1 = (3x-1 = 2\sqrt{5}i)$, 양변을 제곱해서 정리하면
$3x^2-2x+7=0$
$3x^3+4x^2+3x+3$ 를 $3x^2-2x+7$ 로 나누면 몫이 $x+2$, 나머지가 -11 이다.
즉, $3x^3+4x^2+3x+3 = (3x^2-2x+7)(x+2)-11$
$3x^2-2x+7=0$ 이므로
$\therefore\ 3x^3+4x^2+3x+3 = -11$

13. 방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근을 α, $x^2-\alpha x+1=0$의 한 근을 β라 할 때, $\beta^3+\frac{1}{\beta}^{3}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\alpha^3-3\alpha+1=0$에서 $\alpha^3-3\alpha=-1$

$\beta^2-\alpha\beta+1=0$에서 양변을 β로 나누면

$\beta+\frac{1}{\beta}=\alpha(\because \beta\neq 0)$

$$\begin{aligned}\therefore \beta^3+\frac{1}{\beta}^{3} &= \left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3-3\beta\cdot\frac{1}{\beta}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\\ &=\alpha^3-3\alpha=-1\end{aligned}$$

14. x의 이차방정식 $x^2+(k-2)x+2+k^2+k=0$의 두 실근을 α, β라 하고 $(1-\alpha)(1-\beta)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

$\alpha+\beta=2-k,\ \alpha\beta=2+k^2+k$

$\therefore\ (1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2$ ………… ㉠

실근 조건에 의해

$D=(k-2)^2-4(2+k+k^2)\ge 0$

$3k^2+8k+4\le 0 \therefore\ (3k+2)(k+2)\le 0$

$\therefore\ -2\le k\le -\dfrac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$k=-1$일 때 $m=0$

$k=-2$일 때 $M=1$

$\therefore M+m=1$

15. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 서로 다른 두 근 $\alpha,\ \beta$를 갖는다. $f(x)=x^2+bx+a$에 대하여 $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$가 성립할 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$
$f(\alpha)=\alpha^2+b\alpha+a=\beta\cdots$㉠
$f(\beta)=\beta^2+b\beta+a=\alpha\cdots$㉡
㉠ − ㉡하면
$\alpha^2-\beta^2+b(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$
$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+b+1)=0$
$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\beta+b+1=0$
$\therefore\ -a+b+1=0\cdots$㉢
㉠ + ㉡하면
$\alpha^2+\beta^2+b(\alpha+\beta)+2a=\alpha+\beta$
$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(b-1)(\alpha+\beta)+2a=0$
$\therefore\ a^2-2b-a(b-1)+2a=0\cdots$㉣
㉢에서 $b=a-1$을 ㉣에 대입하면
$a^2-2(a-1)-a(a-1-1)+2a=0,\ 2a+2=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$
$\therefore\ a+b=-3$

16. 실계수 이차방정식이 두 허근 α, β를 갖고 $\alpha^2 + 2\beta = 1$일 때, 이 이차방정식은?

① $x^2 + 2x + 3 = 0$ ② $x^2 + 4x + 6 = 0$

③ $x^2 - 2x + 3 = 0$ ④ $x^2 - 4x + 6 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 2 = 0$

해설

$\alpha = m + ni,\ \beta = m - ni$

$(m,\ n\ :\ $ 실수$,\ n \neq 0)$라 놓으면

$\alpha^2 + 2\beta = (m + ni)^2 + 2(m - ni)$

$\qquad = (m^2 - n^2 + 2m) + 2n(m - 1)i = 1$에서

$n \neq 0$이므로 $m = 1,\ n^2 = 2$

$\alpha + \beta = 2m = 2$

$\alpha\beta = m^2 + n^2 = 3$

$\therefore\ \alpha,\ \beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2 - 2x + 3 = 0$

17. x에 대한 방정식 $x^2 - 2px + p + 2 = 0$의 모든 근의 실수부가 음이 되도록 하는 실수 p의 값의 범위는?

① $-2 < p < 0$　② $-2 \le p < 0$　③ $-2 < p \le 0$

④ $-2 \le p \le 0$　⑤ $0 \le p < 2$

해설

$x^2 - 2px + p + 2 = 0$의 근은

$x = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2} \cdots\cdots$ ㉠

(i) ㉠이 실근일 때

$p^2 - p - 2 \ge 0,\ 2p < 0,\ p + 2 > 0$

$\therefore\ -2 < p \le -1$

(ii) ㉠이 허근일 때

$p^2 - p - 2 < 0$이고 $p < 0$

$\therefore\ -1 < p < 0$

이상에서 구하는 p의 조건은 $-2 < p < 0$