1. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2007)}$$

$$= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② -1 ③ 1997
 ④ 0 ⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007})x^{2006} + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2007)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007} = 0$$

2. x 의 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 u, v 에 대하여 $f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가 성립할 때, $f(3)$ 의 값은? (단, $f(1) = 1$ 이라고 한다.)

- ① -1 ② 2 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가
 u, v 에 대한 항등식이므로
 $u = 1, v = 0$ 일 때도 이 등식이 성립한다.
 $\therefore f(1)f(0) = f(1) + f(1)$
 $f(1) = 1$ 이므로 $f(0) = 2$
또, $u = v = 1$ 일 때는
 $f(1)f(1) = f(2) + f(0) \quad \therefore f(2) = -1$
 $\therefore f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) - f(2-1)$
 $= f(2)f(1) - f(1) = -1 - 1$
 $= -2$

3. n 이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x+2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + b) \\ &= (x+2)^2 Q(x) + 4^n(x+2) \end{aligned}$$

$$f(-2) = 4^n(4 - 2a + b) = 0$$

$$\therefore b = 2a - 4$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4) \\ &= x^{2n}(x+2)(x+a-2) \\ &= (x+2)^2 Q(x) + 4^n(x+2) \end{aligned}$$

$$\therefore x^{2n}(x+a-2) = (x+2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4+a) = 4^n, \quad -4+a = 1$$

$$\therefore a = 5$$

$$b = 2a - 4 \text{ 에서 } b = 6$$

$$\therefore a + b = 11$$

4. 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 2차의 다항식 $f(x)$ 의 개수는?

(가) $f(0) = -1$
(나) $f(x^2)$ 은 $f(x)$ 로 나누어 떨어진다.

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다.

해설

$f(0) = -1$ 이므로
 $f(x) = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$)라 하면
 $f(x^2) = ax^4 + bx^2 - 1$ 이다.
 $f(x^2)$ 이 $f(x)$ 로 나누어 떨어지므로
그 몫을 $x^2 + cx + 1$ 이라 하면,
 $(ax^4 + bx^2 - 1) = (ax^2 + bx - 1)(x^2 + cx + 1)$
이 항등식이 되어야 한다.
계수비교에 의해 $ac + b = 0 \dots \text{㉠}$
 $a + bc - 1 = b \dots \text{㉡}$
 $b - c = 0 \dots \text{㉢}$
㉢에서 $c = b$, 이를 ㉠에 대입하면 $b(a + 1) = 0$
 $\therefore b = 0$ 또는 $a = -1$
(i) $b = 0$ 이면 ㉡에서 $a = 1$
(ii) $a = -1$ 이면 ㉡, ㉢에서 $b^2 - b - 2 = 0$
 $\therefore b = 2$ 또는 -1
 $\therefore (a, b) = (1, 0), (-1, 2), (-1, -1)$ 의 3쌍

5. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

- ① $100x + 101$ ② $100x - 99$ ③ $-100x - 99$
 ④ $-99x - 98$ ⑤ $99x + 100$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면
 $x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$
 x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1이므로
 $x^{100} = (x+1)Q(x) + a(x+1) + 1 \Rightarrow a+1 = b$
 $x^{100} - 1 = (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x^2)^{50} - 1 = (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x^2 - 1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \dots + x^2 + 1\}$
 $= (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \dots + x^2 + 1\}$
 $= (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x-1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \dots + x^2 + 1\} = (x+1)Q(x) + a$
 양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-1-1)(1^{49} + 1^{48} + \dots + 1 + 1) = a$
 $a = -100, a+1 = b$ 에서 $b = -99$
 $\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x - 99$

6. 다항식 $x^3 - 2x^2 + mx - 4$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫이 $Q(x)$ 이고 몫 $Q(x)$ 를 $x + 1$ 로 나눈 나머지가 -5 이다. 이때, m 의 값을 구하면?

- ① 6 ② 4 ③ 0 ④ -1 ⑤ -6

해설

$$\begin{aligned}
 x^3 - 2x^2 + mx - 4 &= (x - 1)Q(x) + R \text{이라 하자.} \\
 x = 1 \text{을 대입하면 } R &= m - 5 \\
 x^3 - 2x^2 + mx - 4 &= (x - 1)Q(x) + m - 5 \cdots \text{①} \\
 Q(x) \text{를 } x + 1 \text{로 나눈 나머지가 } -5 \text{이므로} \\
 Q(-1) &= -5 \\
 \text{①식에 } x = -1 \text{을 대입하면} \\
 -1 - 2 - m - 4 &= -2Q(-1) + m - 5 \\
 -2m &= 12 \\
 \therefore m &= -6
 \end{aligned}$$

해설

조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & -2 & m & -4 \\
 & & 1 & -1 & m-1 \\
 -1 & 1 & -1 & m-1 & m-5 \\
 & & -1 & 2 & \\
 & & 1 & -2 & m+1
 \end{array}$$

$$m + 1 = -5 \therefore m = -6$$

7. $f(x)$ 는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2 으로 나누면 나머지는 $x+1$ 이라고 한다. $f(x)$ 를 x^2 으로 나눌 때, 나머지는?

- ① $x + \frac{1}{3}$ ② $x + \frac{1}{2}$ ③ $\frac{x}{3} + 1$ ④ $\frac{x}{2} + 1$ ⑤ $\frac{x}{5} + 1$

해설

$f(x)$ 를 x^2 으로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = x^2Q(x) + ax + b$$

$$\{f(x)\}^3 = \{x^2Q(x) + ax + b\}^3$$

이것을 $x^2P(x) + (ax+b)^3$ 이라 하면

$\{f(x)\}^3$ 을 x^2 으로 나눈 나머지는

$(ax+b)^3$ 을 x^2 으로 나눈 나머지와 같으므로

$$(ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 \text{에서}$$

$$3ab^2x + b^3 = x + 1$$

$$\therefore 3ab^2 = 1, b^3 = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}, b = 1$$

$$\therefore ax + b = \frac{x}{3} + 1$$

8. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$ 이고, $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 8이다. $f(x)$ 를 $(x-1)^2(x+2)$ 로 나누었을 때의 나머지는?

- ① $x^2 - x - 2$ ② $x^2 - x + 2$ ③ $x^2 + x - 2$
④ $-x^2 + 3x$ ⑤ $-x^2 + 3x + 2$

해설

$f(x)$ 를 $(x-1)^2(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지는 $ax^2 + bx + c$ 라 하면

$$f(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + a(x-1)^2 + (x+1)$$

($\because f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$)

양변에 $x = -2$ 를 대입하면 $f(-2) = 9a + (-2) + 1 = 8$

$$\therefore a = 1$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + x + 1 = x^2 - x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $x^2 - x + 2$

9. 다음은 다항식 $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$ 이 x^2+x+1 로 나누어떨어지지 않게 하는 자연수 n 을 구하는 과정이다. ()에 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

ω 가 다항식 $x^2+x+1=0$ 을 만족하는 근이라고 하면 $\omega^2+\omega+1=0$
 $\therefore \omega^3, \omega \neq 1$
 (i) $n=3k(k=0,1,2,\dots)$ 이면
 $\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=(\ominus) \neq 0$
 (ii) $n=3k+1(k=0,1,2,\dots)$ 이면
 $\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=(\omin�)$
 (iii) $n=3k+2(k=0,1,2,\dots)$ 이면
 $\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
 따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n 은 (⊖)이다.

- ① 1, 0, 3k ② 2, 1, 3k+1 ③ 3, 0, 3k+2
 ④ 3, 0, 3k ⑤ 2, 1, 3k

해설

(i) $n=3k$ 이면
 $\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}$
 $=\omega^{6k}+1+(\omega+1)^{6k}$
 $=\omega^{6k}+1+(-\omega^2)^{6k}$
 $=(\omega^3)^{2k}+1+(\omega^3)^{4k}$
 $=1+1+1(\because \omega^3=1)=(3) \neq 0$
 (ii) $n=3k+1$ 이면
 $\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}$
 $=\omega^{6k}+2+1+(\omega+1)^{6k}+2$
 $=\omega^{6k} \cdot \omega^2+1+(-\omega^2)^{6k}+2$
 $=\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k}(-\omega^2)^2$
 $=\omega^2+1+\omega=(0)$
 (iii) $n=3k+2$ 이면
 $\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
 따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n 은 (3k)이다.

10. 이차 이상의 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(a+b)$ 는? (단, a, b 는 서로 다른 실수)

- ① $af(a) + bf(b)$ ② $-af(a) + bf(b)$
 ③ $\frac{af(a) - bf(b)}{a - b}$ ④ $\frac{bf(a) - af(b)}{a - b}$
 ⑤ $bf(a) - af(b)$

해설

$$\begin{aligned}
 R(x) &= cx + d \text{라 하면} \\
 f(a) &= ac + d, f(b) = bc + d \\
 \therefore f(a) - f(b) &= (a - b)c \\
 \therefore c &= \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \\
 \text{또 } f(a) + f(b) &= (a + b)c + 2d \\
 &= \frac{(a + b)\{f(a) - f(b)\}}{a - b} + 2d \\
 \therefore 2d &= f(a) + f(b) - \frac{(a + b)\{f(a) - f(b)\}}{a - b} \\
 &= \frac{(a - b)\{f(a) + f(b)\}}{a - b} - \frac{(a + b)\{f(a) - f(b)\}}{a - b} \\
 &= \frac{1}{a - b} [af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - \{af(a) - af(b) + \\
 &\quad bf(a) - bf(b)\}] \\
 &= \frac{1}{a - b} \{af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - af(a) + af(b) - \\
 &\quad bf(a) + bf(b)\} = \frac{2af(b) - 2bf(a)}{a - b} \\
 \therefore d &= \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 \text{따라서 } R(a + b) &= (a + b)c + d \\
 &= (a + b) \times \frac{f(a) - f(b)}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{(a + b)\{f(a) - f(b)\}}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{af(a) - af(b) + bf(a) - bf(b) + af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{af(a) - bf(b)}{a - b}
 \end{aligned}$$

11. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$

② $b+c$

③ $c+a$

④ $b-a$

⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

$$= (b+c)a^2 + (b^2+2bc+c^2)a + bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c)$$

∴ ④ $b-a$ 는 인수가 아니다

12. a, b, c, d 가 실수이고 $a^2 - b^2 = 3$, $c^2 + d^2 = 4$, $ab = 1$, $cd = 2$ 일 때, $a^2d^2 - b^2c^2$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$a^2 - b^2 = 3 \dots \text{㉠}$$

$$c^2 + d^2 = 4 \dots \text{㉡}$$

$$ab = 1 \dots \text{㉢}$$

$$cd = 2 \dots \text{㉣}$$

$$\text{㉡}, \text{㉣에서 } (c-d)^2 = 0 \quad (\because 2cd = 4)$$

$$\therefore c = d, \quad c^2 = d^2 = 2 \dots \text{㉤}$$

$$\text{㉠}, \text{㉤에서 } a^2d^2 - b^2c^2 = 2(a^2 - b^2) = 2 \times 3 = 6$$

13. 두 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 과 $x^3 + bx^2 + ax + 2$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 5 ② 3 ③ 0 ④ -3 ⑤ -5

해설

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2, g(x) = x^3 + bx^2 + ax + 2$$

두 다항식의 최대공약수를 $x - \alpha$ 라 하면

$$f(\alpha) = 0, g(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) - g(\alpha) = (a - b)\alpha^2 - (a - b)\alpha = 0$$

$$= (a - b)\alpha(\alpha - 1) = 0$$

$a = b$ 이면 두 식이 일치하므로 최대공약수가 일차식이 아니다.

또한 $\alpha = 0$ 이면 $f(\alpha) = 2 \neq 0$ 이므로 적당하지 않다.

$$\therefore \alpha = 1, f(\alpha) = 1 + a + b + 2 = 0$$

$$\therefore a + b = -3$$

14. 두 다항식 $x^3 - ax^2 - bx + 1$, $x^3 + bx^2 + ax + 1$ 의 최대공약수가 x 에 대한 일차식일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값은?

- ① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

최대공약수를 $(x - \alpha)$ 라 하자. 인수정리에 의해

$$\alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha + 1 = 0 \quad \dots \text{①}$$

$$\alpha^3 + b\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{②} - \text{①} = (b+a)\alpha^2 + (a+b)\alpha$$

$$= (a+b)\alpha(\alpha+1) \dots \dots \text{③}$$

$a+b=0$ 이면 두 다항식이 같아지므로 조건에 맞지 않는다

③에서 $\alpha(\alpha+1) = 0 \therefore \alpha = 0$ 또는 -1

i) $\alpha = 0$ 을 ①에 대입: $1 = 0 \Rightarrow$ 성립하지 않는다.

ii) $\alpha = -1$ 을 ①에 대입: $-1 - a + b + 1 = 0$

$$\therefore a - b = 0$$

15. 다항식 $A(x) = x^3 + px^2 + 3x + 1$ 을 다항식 $B(x) = x^2 + qx + 3$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 하자. $B(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $R(2)$ 의 값은?

- ① -6 ② -4 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$A = BQ + R$ 에서 A, B 의 $G.C.M.$ 과 B, R 의 $G.C.M.$ 은 일치한다.
($\Leftarrow$ Euclid 호제법)
그러므로 $x - 1$ 은 $A(x), B(x)$ 의 공약수이다.
 $\therefore A(1) = 0$ 에서 $p = -5$,
 $B(1) = 0$ 에서 $q = -4$
 $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 4x + 3)Q(x) + a(x - 1)$
양변에 $x = 3$ 을 대입하면 $-8 = 2a \therefore a = -4$
 $\therefore R(x) = -4(x - 1) \therefore R(2) = -4$

16. $f(n) = (n+1)^n - n^{n+1}$ 이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, n 은 자연수이고, $i^2 = -1$ 이다.)

- ① $f(n+1) - f(n)$ 은 실수이다.
- ② $f(n+1) - f(n)$ 은 순허수이다.
- ③ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 실수이다.
- ④ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 순허수이다.
- ⑤ $f(1) + f(2) + \dots + f(8)$ 은 순허수이다.

해설

k 가 정수일 때 $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i,$
 $i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$ 이므로
 $f(1) = 2i + 1, f(2) = -3 + 2i, f(3) = -4i - 3, f(4) = 5 - 4i$
 $f(5) = 6i + 5, f(6) = -7 + 6i, f(7) = -8i - 7, f(8) = 9 - 8i$
 ① $f(3) - f(2) = -6i$ (거짓)
 ② $f(2) - f(1) = -4$ (거짓)
 ③ $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -4i$ (거짓)
 ④ $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 4$ (거짓)
 ⑤ $f(1) + f(2) + \dots + f(8)$
 $= \{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\}$
 $+ \{f(5) + f(6) + f(7) + f(8)\}$
 $= -4i - 4i = -8i$ (참)

17. 모든 복소수 z 에 대하여 다음 중 실수인 것을 모두 고르면? (단 $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.)

- ㉠ $(z+1)^2$
 ㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1) - z$
 ㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1) + ((\bar{z})^2 + \bar{z} + 1)(z+1)$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
 ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

- ㉠ (반례) $z = i$ 이면 $(z+1)^2 = (i+1)^2 = 2i$
 (허수)
 ㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1) - z = 2z\bar{z} + (z+\bar{z}) + 1$ (실수)
 ($\because z\bar{z}, z+\bar{z}$ 모두 실수이다.)
 ㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1) = Z$ 라 하면
 (준식) $= Z + \bar{Z}$ 이므로 실수
 따라서 실수인 것은 ㉡, ㉢이다.

18. $(z-\bar{z}) \times i$ 가 음수이고 $\frac{z}{1+z^2}$ 와 $\frac{z^2}{1+z}$ 이 모두 실수일 때, z^2 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수)

- ① $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ② $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 ④ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $1+i$

해설

$$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$$

$$(z - \bar{z}) \times i < 0 \text{ 에서 } -2b < 0 \therefore b > 0$$

$$\frac{z}{1+z^2} \text{ 가 실수이므로}$$

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\therefore z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2) \Leftrightarrow (z\bar{z}-1)(z-\bar{z}) = 0$$

$$\therefore z\bar{z} = 1 (\because z-\bar{z} \neq 0)$$

$$a^2 + b^2 = 1 \dots \textcircled{A}$$

$$\text{한편, } \frac{z^2}{1+z} \text{ 이 실수이므로}$$

$$\frac{z^2}{1+z} = \overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)} = \frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$$

$$\Leftrightarrow z^2(1+\bar{z}) = \bar{z}^2(1+z)$$

$$\Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}+z\bar{z}) = 0$$

$$\therefore z+\bar{z} = -z\bar{z} = -1 (\because z-\bar{z} \neq 0)$$

$$2a = -1 \dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{ 에서 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2} (\because b > 0)$$

$$\therefore z^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

20. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0

② $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱
 해서 정리하면, $x^2 - x + 1 = 0$
 $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 직접 나누면
 몫이 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ 이고 나머지는 $-x$ 이다.
 즉, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
 $= (x^2 - x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) - x$
 $\therefore x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
 $= -x (\because x^2 - x + 1 = 0)$
 $= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 을 만든 다음 양변에 $x + 1$ 를 곱하면
 $(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$
 $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = -x^2 - x - 1 + x^2 + 1$
 $= -x = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

22. $|1-|1-|1-x|| = x-1$ 을 만족시키는 x 의 최솟값, 최댓값을 각각 m, M 이라 할 때, $m+M$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}x-1 &= |1-|1-|1-x|| \geq 0 \\ \therefore x &\geq 1 \\ x \geq 1 \text{ 이면 } |1-x| &= x-1 \\ \therefore |1-|1-x|| &= |1-(x-1)| = |2-x| \\ 1 \leq x \leq 2 \text{ 이면 } \\ |2-x| &= 2-x \text{ 이므로} \\ (\text{좌변}) &= |1-(2-x)| \\ &= |x-1| \\ &= x-1 = (\text{우변}) \\ \therefore 1 \leq x \leq 2 \text{ 인 모든 실수 } x \\ \therefore m &= 1, M = 2, \quad M+m = 3\end{aligned}$$

23. 0이 아닌 세 실수 a, b, c 가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$ 를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$ 의 한 근을 복소수 α 라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

$\text{㉠ } \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$	$\text{㉡ } \alpha + \bar{\alpha} = -1$
$\text{㉢ } \frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$	$\text{㉣ } \alpha^2 = \bar{\alpha}$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉡, ㉣ ③ ㉠, ㉢, ㉣
 ④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak, c = bk, a = ck$
 변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$
 $abc \neq 0$ 이므로 $k^3 = 1$
 $\therefore k = 1 \quad \therefore a = b = c$
 $cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$
 한 근을 α 라 하면 다른 한 근은 $\bar{\alpha}$ 이다
 ㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$
 ㉡ $\alpha + \bar{\alpha} = -1$
 ㉢ $\alpha\bar{\alpha} = 1, \frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$
 ㉣ $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근을 구해보면
 $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \bar{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$
 $\therefore \alpha^2 = \bar{\alpha}$

24. 직선 $y = x + a$ 가 포물선 $y = ax^2 + (b+1)x - \frac{b}{2}$ 에 의해 잘려진 선분의 길이의 최솟값을 구하면?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

교점의 x 좌표를 구하는 식은

$$ax^2 + (b+1)x - \frac{b}{2} = x + a$$

$ax^2 + bx - \frac{b}{2} - a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{-\frac{b}{2} - a}{a}$$

교점은 $(\alpha, \alpha + a), (\beta, \beta + a)$

$\therefore$ 교점을 이은 선분의 길이를 l 이라 하면

$$l^2 = 2(\beta - \alpha)^2 = 2(\beta + \alpha)^2 - 8\alpha\beta$$

$$= 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{-\frac{b}{2} - a}{a}\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right) + 4\right\}$$

$$= 2\left\{\left(\frac{b}{a} + 1\right)^2 + 3\right\} \geq 6$$

$$\therefore l \geq \sqrt{6}$$

25. p 와 q 가 소수이고, $x^2 - px + q = 0$ 이 서로 다른 두 개의 양의 정수근을 가질 때, 다음 중 옳은 문장은 몇 개인가?

- (㉠) 두 근의 차는 홀수이다.
(㉡) 적어도 한 근은 소수이다.
(㉢) $p^2 - q$ 는 소수이다.
(㉣) $p + q$ 는 소수이다.

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 0개

해설

$x^2 - px + q = 0$ 의 서로 다른 양의 정수근을 α, β 라 하면
 $\alpha + \beta = p \dots\dots\textcircled{1}$
 $\alpha\beta = q \dots\dots\textcircled{2}$ 이다.
그런데, q 가 소수이므로 $\textcircled{2}$ 에서 두 근은 1과 q 이다.
 $\therefore \textcircled{1}$ 에서 $1 + q = p \quad \therefore p - q = 1$
그런데 p 도 소수이므로 두 소수의 차가 1인 경우는 $p = 3, q = 2$ 일 때 뿐이다.
 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x-1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = 1, 2$
따라서, 주어진 문장은 모두 옳다.