1. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

$$=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\cdots+\frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$ 의 값을 구하면?

① 1　② -1　③ 1997

④ 0　⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2007})x^{2006}+\cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}=0$

2. x의 다항식 $f(x)$가 임의의 실수 u, v에 대하여 $f(u)f(v)=f(u+v)+f(u-v)$가 성립할 때, $f(3)$의 값은? (단, $f(1)=1$이라고 한다.)

① -1 ② 2 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(u)f(v)=f(u+v)+f(u-v)$가
u, v에 대한 항등식이므로
$u=1$, $v=0$일 때도 이 등식이 성립한다.
$\therefore\ f(1)f(0)=f(1)+f(1)$
$f(1)=1$이므로 $f(0)=2$
또, $u=v=1$일 때는
$f(1)f(1)=f(2)+f(0)\quad \therefore\ f(2)=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(3)&=f(2+1)=f(2)f(1)-f(2-1)\\&=f(2)f(1)-f(1)=-1-1\\&=-2\end{aligned}$$

3. n이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

(i) $f(x) = x^{2n}(x^2+ax+b)$

$= (x+2)^2 Q(x) + 4^n(x+2)$

$f(-2) = 4^n(4-2a+b) = 0$

$\therefore\ b = 2a-4$

(ii) $f(x) = x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$

$= x^{2n}(x+2)(x+a-2)$

$= (x+2)^2 Q(x) + 4^n(x+2)$

$\therefore x^{2n}(x+a-2) = (x+2)Q(x) + 4^n$

$x=-2$ 를 대입하면

$4^n(-4+a) = 4^n$, $-4+a=1$

$\therefore\ a=5$

$b=2a-4$ 에서 $b=6$

$\therefore\ a+b=11$

4. 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 2차의 다항식 $f(x)$의 개수는?

(가) $f(0) = -1$ (나) $f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어 떨어진다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 없다.

해설

$f(0) = -1$이므로
$f(x) = ax^2 + bx - 1 \ (a \neq 0)$라 하면
$f(x^2) = ax^4 + bx^2 - 1$이다.
$f(x^2)$이 $f(x)$로 나누어 떨어지므로
그 몫을 $x^2 + cx + 1$이라 하면,
$(ax^4 + bx^2 - 1) = (ax^2 + bx - 1)(x^2 + cx + 1)$
이 항등식이 되어야 한다.
계수비교에 의해 $ac + b = 0 \cdots$ ㉠
$a + bc - 1 = b \cdots$ ㉡
$b - c = 0 \cdots$ ㉢
㉢에서 $c = b$, 이를 ㉠에 대입하면 $b(a+1) = 0$
$\therefore \ b = 0$ 또는 $a = -1$
(i) $b = 0$이면 ㉡에서 $a = 1$
(ii) $a = -1$이면 ㉡, ㉢에서 $b^2 - b - 2 = 0$
$\therefore \ b = 2$ 또는 -1
$\therefore \ (a, b) = (1, 0), (-1, 2), (-1, -1)$의 3 쌍

5. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x+101$ ② $100x-99$ ③ $-100x-99$

④ $-99x-98$ ⑤ $99x+100$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$

x^{100}을 $x+1$로 나누면 나머지는 1이므로

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)+1$ $(\Rightarrow a+1=b)$

$x^{100}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2)^{50}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}=(x+1)Q(x)+a$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1-1)(1^{49}+1^{48}+\cdots+1+1)=a$

$a=-100,\ a+1=b$에서 $b=-99$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x-99$

6. 다항식 x^3-2x^2+mx-4를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$이고 몫 $Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이다. 이때, m의 값을 구하면?

① 6　　② 4　　③ 0　　④ -1　　⑤ -6

해설

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+R$이라 하자.

$x=1$을 대입하면 $R=m-5$

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+m-5\cdots$①

$Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이므로

$Q(-1)=-5$

①식에 $x=-1$을 대입하면

$-1-2-m-4=-2Q(-1)+m-5$

$-2m=12$

$\therefore\ m=-6$

해설

조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -2 & m & -4 \\
 & & 1 & -1 & m-1 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & m-1 & \boxed{m-5} \\
 & & -1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{m+1} &
\end{array}$$

$m+1=-5\ \therefore\ m=-6$

7. $f(x)$는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나누면 나머지는 $x+1$이라고 한다. $f(x)$를 x^2으로 나눌 때, 나머지는?

① $x+\frac{1}{3}$　② $x+\frac{1}{2}$　③ $\frac{x}{3}+1$　④ $\frac{x}{2}+1$　⑤ $\frac{x}{5}+1$

해설

$f(x)$를 x^2으로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=x^2Q(x)+ax+b$
$\{f(x)\}^3=\{x^2Q(x)+ax+b\}^3$
이것을 $x^2P(x)+(ax+b)^3$이라 하면
$\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나눈 나머지는
$(ax+b)^3$을 x^2으로 나눈 나머지와 같으므로
$(ax+b)^3=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$에서
$3ab^2x+b^3=x+1$
$\therefore\ 3ab^2=1,\ b^3=1$
$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ b=1$
$\therefore\ ax+b=\frac{x}{3}+1$

8. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 8이다. $f(x)$를 $(x-1)^2(x+2)$로 나누었을 때의 나머지는?

① x^2-x-2 ② x^2-x+2 ③ x^2+x-2

④ $-x^2+3x$ ⑤ $-x^2+3x+2$

해설

$f(x)$를 $(x-1)^2(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지는 ax^2+bx+c라 하면

$f(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+(x+1)$

($\because$ $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$)

양변에 $x=-2$를 대입하면 $f(-2)=9a+(-2)+1=8$

$\therefore\ a=1$

$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+x+1=x^2-x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지는 x^2-x+2

9. 다음은 다항식 $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$이 x^2+x+1로 나누어떨어지지 않게 하는 자연수 n을 구하는 과정이다. (　　　) 에 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

> ω가 다항식 $x^2+x+1=0$을 만족하는 근이라고 하면 $\omega^2+\omega+1=0$
> $\therefore\ \omega^3,\ \omega\neq 1$
> (i) $n=3k(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> $\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=($ ㉠ $)\neq 0$
> (ii) $n=3k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> $\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=($ ㉡ $)$
> (iii) $n=3k+2(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> $\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
> 따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n은 (㉢) 이다.

① $1, 0, 3k$　　② $2, 1, 3k+1$　　③ $3, 0, 3k+2$
④ $3, 0, 3k$　　⑤ $2, 1, 3k$

해설

(i) $n=3k$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}$
$=\omega^{6k}+1+(\omega+1)^{6k}$
$=\omega^{6k}+1+(-\omega^2)^{6k}$
$=(\omega^3)^{2k}+1+(\omega^3)^{4k}$
$=1+1+1(\because\ \omega^3=1)=(\ 3\ )\neq 0$
(ii) $n=3k+1$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}$
$=\omega^{6k}+2+1+(\omega+1)^{6k}+2$
$=\omega^{6k}\cdot\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k}+2$
$=\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k}(-\omega^2)^2$
$=\omega^2+1+\omega=(\ 0\ )$
(iii) $n=3k+2$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n은 $(3k)$ 이다.

10. 이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(a+b)$는? (단, a, b는 서로 다른 실수)

① $af(a)+bf(b)$　　② $-af(a)+bf(b)$

③ $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$　　④ $\dfrac{bf(a)-af(b)}{a-b}$

⑤ $bf(a)-af(b)$

해설

$R(x)=cx+d$라 하면

$f(a)=ac+d,\ f(d)=bc+d$

$\therefore\ f(a)-f(b)=(a-b)c$

$\therefore\ c=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

또 $f(a)+f(b)=(a+c)c+2d$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+2d$

$\therefore\ 2d=f(a)+f(b)-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{(a-b)\{f(a)+f(b)\}}{a-b}-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{1}{a-b}\Big[af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-\{af(a)-af(b)+$
$bf(a)-bf(b)\}\Big]$

$=\dfrac{1}{a-b}\{af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-af(a)+af(b)-$
$bf(a)+bf(b)\}=\dfrac{2af(b)-2bf(b)}{a-b}$

$\therefore\ d=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

따라서 $R(a+b)=(a+b)c+d$

$=(a+b)\times\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)+af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$

11. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a+b$ ② $b+c$ ③ $c+a$

④ $b-a$ ⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$
$$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$$
$$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a+c)$$

$\therefore$ ④ $b-a$는 인수가 아니다

12. $a,\ b,\ c,\ d$가 실수이고 $a^2-b^2=3,\ c^2+d^2=4,\ ab=1,\ cd=2$일 때, $a^2d^2-b^2c^2$의 값을 구하면?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$a^2-b^2=3 \cdots$ ㉠

$c^2+d^2=4 \cdots$ ㉡

$ab=1 \cdots$ ㉢

$cd=2 \cdots$ ㉣

㉡, ㉣에서 $(c-d)^2=0$ ($\because 2cd=4$)

$\therefore c=d,\ c^2=d^2=2 \cdots$ ㉤

㉠, ㉤에서 $a^2d^2-b^2c^2=2(a^2-b^2)=2\times 3=6$

13. 두 다항식 x^3+ax^2+bx+2과 x^3+bx^2+ax+2의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면?

① 5 ② 3 ③ 0 ④ -3 ⑤ -5

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$, $g(x)=x^3+bx^2+ax+2$
두 다항식의 최대공약수를 $x-\alpha$ 라 하면
$f(\alpha)=0, g(\alpha)=0$
$f(\alpha)-g(\alpha)=(a-b)\alpha^2-(a-b)\alpha=0$
$\qquad\qquad\qquad=(a-b)\alpha(\alpha-1)=0$
$a=b$이면 두 식이 일치하므로 최대공약수가 일차식이 아니다.
또한 $\alpha=0$이면 $f(\alpha)=2\neq 0$이므로 적당하지 않다.
$\therefore\ \alpha=1,\ f(\alpha)=1+a+b+2=0$
$\therefore\ a+b=-3$

14. 두 다항식 x^3-ax^2-bx+1, x^3+bx^2+ax+1의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

최대공약수를 $(x-\alpha)$라 하자. 인수정리에 의해

$\alpha^3-a\alpha^2-b\alpha+1=0 \quad \cdots$ ①

$\alpha^3+b\alpha^2+a\alpha+1=0 \quad \cdots$ ②

②−① $=(b+a)\alpha^2+(a+b)\alpha$

$\quad\quad =(a+b)\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots$③

$a+b=0$이면 두 다항식이 같아지므로 조건에 맞지 않는다

③에서 $\alpha(\alpha+1)=0 \quad \therefore \quad \alpha=0$ 또는 -1

i) $\alpha=0$ 을 ①에 대입 : $1=0 \Rightarrow$ 성립하지 않는다.

ii) $\alpha=-1$ 을 ①에 대입 : $-1-a+b+1=0$

$\therefore \ a-b=0$

15. 다항식 $A(x) = x^3 + px^2 + 3x + 1$을 다항식 $B(x) = x^2 + qx + 3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자. $B(x)$와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$일 때, $R(2)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$A = BQ + R$에서 A, B 의 $G.C.M.$과 B, R의 $G.C.M.$은 일치한다.
($\Leftarrow$ *Euclid* 호제법)
그러므로 $x-1$은 $A(x)$, $B(x)$의 공약수이다.
$\therefore$ $A(1) = 0$ 에서 $p = -5$,
$B(1) = 0$에서 $q = -4$
$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 4x + 3)Q(x) + a(x-1)$
양변에 $x = 3$을 대입하면 $-8 = 2a$ $\therefore$ $a = -4$
$\therefore$ $R(x) = -4(x-1)$ $\therefore$ $R(2) = -4$

16. $f(n)=(n+1)i^{n}-ni^{n+1}$ 이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, n 은 자연수이고, $i^2=-1$ 이다.)

① $f(n+1)-f(n)$ 은 실수이다.

② $f(n+1)-f(n)$ 은 순허수이다.

③ $f(n)+f(n+1)+f(n+2)+f(n+3)$ 은 실수이다.

④ $f(n)+f(n+1)+f(n+2)+f(n+3)$ 은 순허수이다.

⑤ $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$ 은 순허수이다.

해설

k가 정수일 때 $i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i$,
$i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$ 이므로
$f(1)=2i+1$,$f(2)=-3+2i$, $f(3)=-4i-3$, $f(4)=5-4i$
$f(5)=6i+5$,$f(6)=-7+6i$, $f(7)=-8i-7$,$f(8)=9-8i$
① $f(3)-f(2)=-6i$ (거짓)
② $f(2)-f(1)=-4$ (거짓)
③ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-4i$ (거짓)
④ $f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=4$ (거짓)
⑤ $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$

$$=\{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\}$$
$$+\{f(5)+f(6)+f(7)+f(8)\}$$
$$=-4i-4i=-8i$$ (참)

17. 모든 복소수 z 에 대하여 다음 중 실수인 것을 모두 고르면 ? (단 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

㉠ $(z+1)^2$

㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z$

㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)+\left((\bar{z})^2+\bar{z}+1\right)(z+1)$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ (반례) $z=i$ 이면 $(z+1)^2=(i+1)^2=2i$
(허수)

㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z=2z\bar{z}+(z+\bar{z})+1$ (실수)
($\because$ $z\bar{z}, z+\bar{z}$ 모두 실수이다.)

㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)=Z$ 라 하면
(준식)$=Z+\overline{Z}$ 이므로 실수

따라서 실수인 것은 ㉡, ㉢이다.

18. $(z-\bar{z})\times i$ 가 음수이고 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 와 $\dfrac{z^2}{1+z}$ 이 모두 실수일 때, z^2 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ② $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

④ $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $1+i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

$(z-\bar{z})\times i<0$ 에서 $-2b<0 \therefore b>0$

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이므로

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$\therefore\ z(1+\bar{z}^2)=\bar{z}(1+z^2) \Leftrightarrow (z\bar{z}-1)(z-\bar{z})=0$

$\therefore\ z\bar{z}=1\ (\because\ z-\bar{z}\neq 0)$

$a^2+b^2=1 \cdots ㉠$

한편, $\dfrac{z^2}{1+z}$ 이 실수이므로

$$\frac{z^2}{1+z}=\overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)}=\frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$$

$\Leftrightarrow\ z^2(1+\bar{z})=\bar{z}^2(1+z)$

$\Leftrightarrow\ (z-\bar{z})(z+\bar{z}+z\bar{z})=0$

$\therefore\ z+\bar{z}=-z\bar{z}=-1(\because\ z-\bar{z}\neq 0)$

$2a=-1 \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because b>0\ )$

$$\therefore\ z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

19. $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$, $a^2+b^2 = 1, c^2+d^2 = 1$, a, b, c, d는 실수라 할 때, z_1과 z_2에 대하여 <보기>중 옳은 것을 모두 고르면? (단,$i = \sqrt{-1}$)

보기

ㄱ $z_1 + z_2$의 실수부의 제곱과 허수부의 제곱의 합은 1이다.

ㄴ $z_1 \times z_2$의 실수부의 제곱과 허수부의 제곱의 합은 1이다.

ㄷ $z_1 \div z_2$의 실수부의 제곱과 허수부의 제곱의 합은 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ 이므로

ㄱ $z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

$(a+c)^2 + (b+d)^2$ 은 항상 1이 된다고 볼 수 없다.

$\therefore$ $z_1 + z_2$의 실수부의 제곱과 허수부의 제곱의 합은 항상 1이라 할 수 없다.

ㄴ $z_1 \times z_2 = (a+bi)(c+di)$

$= (ac-bd) + (ad+bc)i$

$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$

$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$

$= a^2(c^2+d^2) + b^2\left(c^2+d^2\right)$

$= (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 1$

$\therefore$ $z_1 \times z_2$의 실수부의 제곱과 허수부의 제곱의 합은 항상 1이라 할 수 없다.

ㄷ
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = (ac+bd)+(bc-ad)i$$

$(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 1$

$\therefore$ $z_1 \div z_2$의 실수부의 제곱과 허수부의 제곱의 합은 항상 1이라 할 수 없다.

20. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0 ② $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ③ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

④ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면, $x^2 - x + 1 = 0$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 직접 나누면

몫이 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= (x^2 - x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) - x$

$\therefore\ x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= -x\ (\because x^2 - x + 1 = 0)$

$= \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 을 만든 다음 양변에 $x+1$ 를 곱하면

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = -x^2 - x - 1 + x^2 + 1$$
$$= -x = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

21. 실수 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_9 가 $9+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_9 = 0$ 을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_3} \cdot \cdots \cdot \sqrt{x_9}$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $3i$

② $-3i$

③ $3i$, $-3i$

④ 3, -3

⑤ 3, -3, $3i$, $-3i$

해설

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_9 = -9$ 이므로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_9 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.
이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여
y_1, y_2, y_3, $\cdots$, y_m 이라 하고 양수인 것들을
z_1, z_2, z_3, $\cdots$, z_n 이라 하면, ($m+n=9$, m 은 홀수)

(i) $m=4k+1$ ($k=0$, 1, 2) 일 때

$$\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\cdots\sqrt{x_9}$$
$$=\sqrt{y_1y_2\cdots y_mz_1z_2\cdots z_n}\cdot i^{4k+1}$$
$$=\sqrt{9}\cdot i = 3i$$

(ii) $m=4k+3$ ($k=1$, 2) 일 때

$$\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\cdots\sqrt{x_9}$$
$$=\sqrt{y_1y_2\cdots y_mz_1z_2\cdots z_n}\cdot i^{4k+3}$$
$$=\sqrt{9}\cdot i^3$$
$$=-3i$$

(i), (ii) 에서 $3i$, $-3i$

22. $|1-|1-|1-x||| = x-1$을 만족시키는 x의 최솟값, 최댓값을 각각 m, M이라 할 때, $m+M$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x-1 = |1-|1-|1-x||| \geq 0$

$\therefore\ x \geq 1$

$x \geq 1$이면 $|1-x| = x-1$

$\therefore |1-|1-x|| = \left|1-(x-1)\right| = |2-x|$

$1 \leq x \leq 2$이면

$|2-x| = 2-x$이므로

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \left|1-(2-x)\right| \\ &= |x-1| \\ &= x-1 = (\text{우변})\end{aligned}$$

$\therefore\ 1 \leq x \leq 2$인 모든 실수 x

$\therefore\ m = 1,\ M = 2,\quad M+m = 3$

23. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$의 한 근을 복소수 α라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$	㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$
㉢ $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$	㉣ $\alpha^2 = \overline{\alpha}$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak,\ c = bk,\ a = ck$

변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$

$abc \neq 0$이므로 $k^3 = 1$

$\therefore k = 1 \quad \therefore\ a = b = c$

$cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$

㉣ $x^2 + x + 1 = 0$의 근을 구해보면

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \alpha^2 = \overline{\alpha}$

24. 직선 $y=x+a$가 포물선 $y=ax^2+(b+1)x-\frac{b}{2}$에 의해 잘려진 선분의 길이의 최솟값을 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

교점의 x좌표를 구하는 식은

$ax^2+(b+1)x-\frac{b}{2}=x+a$

$ax^2+bx-\frac{b}{2}-a=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{-\frac{b}{2}-a}{a}$

교점은 $(\alpha,\ \alpha+a)$, $(\beta,\ \beta+a)$

$\therefore$ 교점을 이은 선분의 길이를 l이라 하면

$l^2=2(\beta-\alpha)^2=2(\beta+\alpha)^2-8\alpha\beta$

$=2\left(-\frac{b}{a}\right)^2-8\left(\dfrac{-\frac{b}{2}-a}{a}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\left(\frac{b}{a}\right)+4\right\}$

$=2\left\{\left(\frac{b}{a}+1\right)^2+3\right\}\geq 6$

$\therefore\ l\geq\sqrt{6}$

25. p와 q가 소수이고, $x^2-px+q=0$이 서로 다른 두 개의 양의 정수근을 가질 때, 다음 중 옳은 문장은 몇 개인가?

(가) 두 근의 차는 홀수이다. (나) 적어도 한 근은 소수이다. (다) p^2-q는 소수이다. (라) $p+q$는 소수이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 0개

해설

$x^2-px+q=0$의 서로 다른 양의 정수근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=p \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=q \quad \cdots\cdots$ ㉡이다.

그런데, q가 소수이므로 ㉡에서 두 근은 1과 q이다.

$\therefore$ ㉠에서 $1+q=p \quad \therefore \ p-q=1$

그런데 p도 소수이므로 두 소수의 차가 1인 경우는 $p=3, q=2$ 일 때 뿐이다.

$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore \ x=1, \ 2$

따라서, 주어진 문장은 모두 옳다.

26. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+p+5=0$의 두근 $\alpha,\ \beta$가 모두 양의 정수일 때, $\alpha>\beta$를 만족하는 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 1 개

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=p+1,\ \alpha\beta=p+5$

$\therefore \alpha+\beta-1=\alpha\beta-5$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=5$

$\alpha,\ \beta$ 모두 양의 정수이고, $\alpha>\beta$이므로

$\alpha-1=5,\quad \beta-1=1$

$\alpha=6,\quad \beta=2$

$\therefore (6,\ 2)$ 1 개