1. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=9,\ a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69　② 70　③ 71　④ 72　⑤ 73

해설

$a+b+c=3 \cdots$①
$a^2+b^2+c^2=9 \cdots$②
$a^3+b^3+c^3=24 \cdots$③ 이라 하면,
②식에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$
$9-2(ab+bc+ca)=9$
$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$④
③식에서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$24=3\cdot(9-0)+3abc$
$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots$⑤
$a^4+b^4+c^4+1$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$
$=81-2\cdot 6+1=70$
$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=0-2\times(-1)\times 3$
$=6)$

2. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6$, $f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \cdots + \alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

> $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$(단, $a_n \neq 0$)라고 놓으면
> $f(x+1)-f(x-1)$
> $= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\} + \cdots + a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
> $= \boxed{}\, x^{n-1} + \cdots = 6x^2+6$
> 에서 $n=3$, $a_n=1$
> $\therefore\ f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1$
> $f(x+1)-f(x-1) = 6x^2 + 4a_2x + 2 + 2a_1$
> 이므로 $a_2=0$, $a_1=2$ 즉, $f(x) = x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$에 알맞은 것은?

① a_n　② $2a_n$　③ na_n　④ $2na_n$　⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$
$= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$
$= a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\} + a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\}+\cdots$
$= a_n(2nx^{n-1}+\cdots) + a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\}+\cdots$
$= 2na_nx^{n-1} + \{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$
$\therefore\ 2na_nx^{n-1} = 6x^2$에서
$n-1=2$, $2na_n=6$
$\therefore\ n=3$, $a_n=1$

3. x에 대한 다항식 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x-2)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $3b-2a$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$

$x^{10}\left(x^2+ax+b\right)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$이므로

$x^2+ax+b=(x-2)(x-\alpha)$라 할 수 있다.

$x^{10}(x-2)(x-\alpha)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$

$\therefore\ x^{10}(x-\alpha)=(x-2)Q(x)+2^{10}$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(2-\alpha)=2^{10}\ \therefore \alpha=1$

$\therefore\ x^2+ax+b=(x-2)(x-1)$

$=x^2-3x+2$

$a=-3,\ b=2$

$\therefore\ 3b-2a=12$

4. 모든 실수 x에 대하여$(x-1)^{10} = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_{10}$ 이 성립할 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값은? (단, a_i는 상수, $i = 0,\ 1,\ 2, \cdots, 10$)

① -2^{10} ② -2^9 ③ 2^9 ④ 2^{10} ⑤ 2^{55}

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0 \cdots$①

양변에 $x = -1$을 대입하면

$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} = 2^{10} \cdots$②

① − ② 하면 $2(a_1 + a_3 + \cdots + a_9) = -2^{10}$

$\therefore\ a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = -2^9$

5. 임의의 자연수 k에 대하여 $x-k$로 나눈 나머지가 k인 다항식 $f(x)$의 개수를 구하면?

① 0 개　　② 1 개　　③ 2 개

④ 3 개　　⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k에 대하여 $\therefore\ f(k) = k$
따라서 $g(x) = f(x) - x$로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x) = 0$
이 성립
$\therefore\ g(x) = 0$
즉, $f(x) = x$
$\therefore$ 1 개

6. $P(x) = x^2+x+1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-4$　　② $4x-1$　　③ 5

④ 4　　⑤ 3

해설

$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2 + w + 1 = 0,$ 양변에 $(w-1)$ 을 곱하면

$w^3 - 1 = 0,\ w^3 = 1$

$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b$ 에

w 를 대입하면,

$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$

$3 = aw + b$

w 는 허수, $a,\ b$ 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

$\therefore$ 나머지$= 3$

7. 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$라 한다. $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(\alpha)$의 값은?

① 0　　② α　　③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$　　⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x) = (x-\alpha)Q_1(x) + R_1$에서
$Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R_{n+1}이라 하면

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x) + R_2\} + R_1 \\
&= (x-\alpha)^2 Q_2(x) + (x-\alpha)R_2 + R_1 \\
&= (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x) + R_3\} + (x-\alpha)R_2 + R_1 \\
&= (x-\alpha)^3 Q_3(x) + (x-\alpha)^2 R_3 + (x-\alpha)R_2 + R_1 \\
&\vdots \\
&= (x-\alpha)^n Q_n(x) + (x-\alpha)^{n-1}R_n + \\
&\qquad \cdots\cdots + (x-\alpha)R_2 + R_1
\end{aligned}
$$

따라서 $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를
$R(x)$라 하면
$R(x) = (x-\alpha)^{n-1}R_n + \cdots + (x-\alpha)R_2 + R_1$
$\therefore\ R(\alpha) = R_1 = f(\alpha)$

8. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2이다. 다항식 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

① $2xQ(x)-2,\ -1$　② $2xQ(x)-1,\ -1$
③ $\frac{1}{2}xQ(x)-2,\ 1$　④ $\frac{1}{2}xQ(x)-1,\ 1$
⑤ $\frac{1}{2}xQ(x)+1,\ 2$

해설

$$f(x)=(2x-1)Q(x)-2$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)2Q(x)-2$$
$$xf(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2x$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)-2\}-1$$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, x^2-4x+5, $(x-1)(x^2-4x+5)$ 로 나누면 나머지가 각각 4, $px+q$, $(x-r)^2$ 이 될 때, pqr 의 값은? (단, $r>0$)

① -24　② -36　③ 20　④ 18　⑤ 14

해설

$f(x)=(x^2-4x+5)Q(x)+px+q\cdots$①
$=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x-r)^2\cdots$②
$=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x^2-4x+5)+px+q\cdots$③
$f(1)=4$ 이므로 ②에서 $f(1)=(1-r)^2=4$
$r>0$ 이므로 $r=3$
②, ③을 비교해 보면
$(x-r)^2=(x^2-4x+5)+px+q$
$r=3$ 을 대입하면
$(x-3)^2=x^2+(p-4)x+(q+5)$
$\therefore\ p-4=-6,\ q+5=9$
$\therefore\ p=-2,\ q=4$
$\therefore\ pqr=-24$

10. 2003^{10} 를 2002 와 2004 로 나눈 나머지가 각각 a, b 일 때, $a-b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ −1 ④ 2 ⑤ −2

해설

2002를 x라 하면, $2003^{10} = (x+1)^{10}$
$(x+1)^{10} = xQ(x)+a$
$(x+1)^{10} = (x+2)Q(x)+b$
나머지 정리에 의해
$x=0$, $x=-2$를 각각 대입하면,
$a=1$, $b=1$
$\therefore a-b=0$

11. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2, f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 한다.
$f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x,\ f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(i) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ii) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(iii) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 2n = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -6, b = 12, c = -6$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$

12. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 없는 것은?

① $a+b$　　② $2a-2b$　　③ $2b-2a$

④ $2b-2c$　　⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\left\{a^2-(c+b)a+bc\right\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots$㉠

$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots$㉡

$=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots$㉢

$=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots$㉣

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$

㉡식 : 세항을 모두 더하면 0

㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$

㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

13. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 - 1$ 의 값과 같은 것은?

① $\frac{3^2 \times 997^3}{10}$　② $\frac{3^2 \times 997^6}{10}$　③ $-\frac{3^2 \times 997^3}{10}$

④ $-\frac{3^2 \times 997}{10^6}$　⑤ $-\frac{3^2 \times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$ 과 $\frac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\frac{997+3}{1000} = 1$ 이므로

$a = \frac{997}{1000}$, $b = \frac{3}{100}$, $c = -1$ 이라 하면

$a+b+c=0$ 이 된다.

따라서 $a+b+c=0$ 이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서 $a^3+b^3+c^3=3abc$

임을 이용하면

$a^3+b^3+c^3 = \left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 + (-1)^3$ 의 값은

$3abc = 3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1)$ 와 같으므로

구하는 값은

$3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) = -\frac{3^2 \times 997}{10^6}$

14. 세 변의 길이가 $x,\ y,\ z$인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore\ x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because\ x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 $x,\ y,\ z$는 $x+y\neq z$)

15. $10^{20}-4$ 과 $10^{30}-8$의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리 ② 11자리 ③ 12자리
④ 13자리 ⑤ 14자리

해설

$$\begin{aligned}10^{20}-4 &= (10^{10})^2-2^2\\ &= \left(10^{10}-2\right)\left(10^{10}+2\right)\\ 10^{30}-8 &= (10^{10})^3-2^3\\ &= \left(10^{10}-2\right)\left(10^{20}+10^{10}\times 2+4\right)\end{aligned}$$

$\therefore$ 최대 공약수는 $2\left(10^{10}-2\right)=2\cdot 10^{10}-4$

$\therefore$ 11자리수

16. x에 대한 두 다항식 $A = x(x-a-4)(x+a^2-1)$, $B = (x+3)(x+a)(x+a^2-5)$의 최대공약수가 x에 대한 이차식이 되도록 하는 정수 a에 대하여 a^2+a의 값을 구하면?

① 20　② 16　③ 10　④ 5　⑤ 2

해설

ⅰ) A의 인수 x를 최대공약수의 인수라고 하면
B에서 $x=0$을 대입하면
$3a(a^2-5)=0$, $a=0$($\because a$가 정수)
$\Rightarrow$두 식의 최대공약수는 이차가 아니다.
ⅱ) B의 인수 $x+3$이 최대공약수의 인수라고 하면
A에서 $x=-3$을 대입하면
$-3(-a-7)(a^2-4)=0$, $a=-7, 2, -2$
$a=-7, 2$일 때 A, B의 최대공약수는 일차식
$a=-2$일 때
즉, $(x+3)(x-2)$가 최대공약수가 이차식이다.
$\therefore\ a=-2,\ a^2+a=2$

17. 두 다항식 $x^3+x^2+x+3+m$, x^2-x+m이 서로소가 아닐 때, 상수 m의 값을 구하면?

① $-1,\ 2$ ② $-2,\ 3$ ③ $-1,\ 2$ ④ $-1,\ 3$ ⑤ $-2,\ 2$

해설

서로소가 아니라는 것은 일차이상의 공약수가 존재한다는 뜻이다.
$f(x)=x^3+x^2+x+3+m \cdots$ ㉠
$g(x)=x^2-x+m \cdots$ ㉡
으로 놓으면
$f(x)-g(x)=x^3+2x+3=(x+1)(x^2-x+3)$
㉠과 ㉡이 서로소가 아니므로 ㉠과 ㉡의 최대공약수는
$x+1$ 또는 x^2-x+3이다.
(i) $x+1$이 최대공약수일 때, $m=-2$
(ii) x^2-x+3이 최대공약수일 때, 이 식과 $g(x)$는 서로 같아야 하므로 $m=3$
(i), (ii)에서 $m=-2$ 또는 3

18. 두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 몫을 Q_1 , 나머지를 R_1 이라 할 때, B 는 R_1 로 나누어 떨어지고 그 몫은 Q_2 이다. 이 때, A, B 의 최소공배수는? (단, A 의 차수가 B 의 차수보다 크다.)

① AB
② $\frac{AB}{R_1}$
③ $\frac{AB}{Q_1}$
④ $\frac{AB}{Q_2}$
⑤ $\frac{AB}{Q_1Q_2}$

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면
$A = BQ_1 + R_1 \cdots$ ㉠
$B = R_1Q_2 \cdots$ ㉡
유클리드의 호제법에 의하여
A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R_1 의 최대공약수와 같다.
㉠, ㉡에서 B 와 R_1 의 최대공약수는 R_1 이므로
A 와 B 의 최대공약수는 R_1 이다.
따라서, A, B 의 최소공배수는 $\frac{AB}{R_1}$

19. 복소수 α,β 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단 $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
>
> ㉡ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
>
> ㉢ $\overline{\alpha}=\alpha$ 이면 α 는 실수이다.
>
> ㉣ $\overline{a}=\beta$ 이면 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

① ㉠,㉡,㉢　　② ㉠,㉢,㉣　　③ ㉡,㉢,㉣
④ ㉠,㉡,㉢,㉣　　⑤ ㉢,㉣

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$ 일 때 $\alpha^2+\beta^2=0$
㉡ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$ 일 때 $\alpha+\beta i=0$
㉢ $\overline{\alpha}=\alpha \rightarrow \alpha$ 는 실수(참)
㉣ $\alpha=a+bi,\ \overline{a}=\beta=a-bi(a,b$는 실수)
$\alpha+\beta=2a$(실수), $\alpha\beta=a^2+b^2$(실수) (참)

20. 복소수 α, β 는 $\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4　　② 3　　③ 2　　④ 1　　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\alpha + \beta = i$에서 $\overline{\alpha + \beta} = \overline{i}$ $\quad \therefore \ \overline{\alpha} + \overline{\beta} = -i$

$\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$에서 $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, $\overline{\beta} = \frac{1}{\beta}$

$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$ $\quad \therefore \ \alpha\beta = -1$

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = i^2 - 2 \cdot (-1) = 1$

21. 복소수 α 의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ $\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$\alpha^3 = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수, $a > 0$)라 두면

$\alpha^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = i$

$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = i$

$a^3 - 3ab^2 = 0 \cdots$ ㉠, $3a^2b - b^3 = 1 \cdots$ ㉡

㉠에서 $a^2 = 3b^2$ 을 얻어 ㉡에 대입하면

$b = \dfrac{1}{2},\ a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}+i} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{\sqrt{3}-i}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

해설

$\alpha^3 = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^3 = \alpha^3 + \dfrac{1}{\alpha^3} + 3\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^3 = i + \dfrac{1}{i} + 3\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^3 = 3\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)\left\{\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 - 3\right\} = 0$

$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \neq 0, \alpha + \dfrac{1}{\alpha} > 0$

($\because$ 복소수 α 의 실수부가 양이므로)

$\therefore\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{3}$

22. 복소수 z가 $z^2=\bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수의 개수를 구하면? (단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① 2　　② 4　　③ 6

④ 8　　⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$ (단, $a,\ b$는 실수)라 하면

$(a+bi)^2=a-bi$

$a^2-b^2+2abi=a-bi$

$a^2-b^2=a\ \ \cdots\cdots$ ㉠

$2ab=-b\ \ \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $b=0$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

(i) $b=0$ 일 때 ㉠에서 $a^2=a$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=1$

(ii) $a=-\frac{1}{2}$ 일 때 ㉠에서 $\frac{1}{4}-b^2=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서, $z=0,\ 1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

23. $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 양변에 2를 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0 \cdots$①

$\therefore\ \alpha+1=-\alpha^2, \beta+1=-\beta^2$

①의 양변에 각각 $\alpha-1, \beta-1$ 을 곱하면

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0, (\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=1, \beta^3=1$

$(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$

$=(-\alpha^2)^{10}+(-\beta^2)^{10}$

$=(\alpha^3)^6\cdot\alpha^2+(\beta^3)^6\cdot\beta^2$

$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=-1\ (\because\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1\ )$

해설

$\alpha+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta+1=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha+1=A,\ \beta+1=B$ 라 하면

$A+B=1, AB=1$ 이므로 $A,\ B$ 는

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근 이다.

$(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1=0$

$\therefore x^3=-1, A^3=B^3=-1$

$$\begin{aligned}(\text{준식})=A^{10}+B^{10} &= \left(A^3\right)^3\cdot A+\left(B^3\right)^3\cdot B \\ &= -(A+B) \\ &= -1\end{aligned}$$

24. 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 가 $16+x_1\times x_2\times\cdots\times x_9=0$ 을 만족할 때, $\sqrt{x_1}\times\sqrt{x_2}\times\cdots\times\sqrt{x_9}$ 의 값들의 곱을 구하면?

① 8　② 16　③ 24　④ 36　⑤ 14

해설

$x_1\times x_2\times\ \cdots\ x_9=-16$ 이므로
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.
이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여
$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_m\ \ (y_i>0)$ 이라 하고 양수인 것들은
$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots,\ z_n\ (z_i>0)$ 이라 하자.
그러면 $y_1y_2\cdots y_mz_1z_2\cdots z_n=16\ (m+n=9,\ m:$홀수$)$
i) $m=4k+1\ (k=0,\ 1,\ 2)$ 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1y_2\cdots y_mz_1z_2\cdots z_n}\cdot i^{4k+1}\\ &= \sqrt{16}\times(i^4)^k\times i\\ &= 4i\end{aligned}$$

ii) $m=4k+3\ (k=0,\ 1)$ 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1y_2\cdots y_mz_1z_2\cdots z_n}\cdot i^{4k+3}\\ &= \sqrt{16}\times(i^4)^k\times i^3\\ &= -4i\end{aligned}$$

$\therefore$ i), ii) 에서 $4i\times(-4i)=16$

25. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 $< x >$로 나타낼 때, 방정식 $[x] + < x >= 7$의 해를 구하면?

① $\frac{7}{2}$　② $3 \le x \le 4$　③ $3 \le x < 4$
④ $3 < x \le 4$　⑤ $3 < x < 4$

해설

x가 정수 k일 때,
$[x] =< x >= k$
$k < x < k+1$일 때,
$[x] = k, < x >= k+1$
따라서 $[x] + < x >= 7$이고
$[x], < x >$는 정수이므로
$[x] = 3, \ < x >= 4 \ (\because \ [x] \le < x >)$
$\therefore \ 3 < x < 4$

26. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\left\{1+(a+b)^2\right\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\left\{1+(a+b)^2\right\}$$

$$=1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2\geq 0$$

$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

즉, $(a+b+1)^2\leq 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$

$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$

$=3$

27. $x^2+kxy-2y^2+3y-1$ 이 x, y 에 관한 일차식의 곱으로 인수분해되는 k 의 값을 구하면?

① ±1　② ±2　③ ±3　④ ±4　⑤ ±6

해설

$x^2+kyx-(2y^2-3y+1)=0$ 에서

$D=k^2y^2+4(2y^2-3y+1)$

$\quad=(k^2+8)y^2-12y+4$

이 식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$\frac{D}{4}=36-4(k^2+8)=0$

$\therefore k=\pm1$

28. x에 관한 이차방정식 $x^2+(m+1)x+(m^2-1)=0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하면? (단, m은 실수이다.)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$D=(m+1)^2-4(m^2-1) \geq 0,\ 3m^2-2m-5 \leq 0,\ (3m-5)(m+1) \leq 0$

$\therefore\ -1 \leq m \leq \frac{5}{3}$

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-(m+1),\ \alpha\beta=m^2-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\{-(m+1)\}^2-2(m^2-1)$

$=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m=-1$일 때)

29. 방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $f(\alpha)=\beta,\ \ f(\beta)=\alpha,\ \ f(1)=1$을 만족시키는 이차식 $f(x)$를 구하면?

① $f(x)=x^2-x+1$

② $f(x)=x^2-2x+2$

③ $f(x)=x^2+x-1$

④ $f(x)=x^2+2x-2$

⑤ $f(x)$는 모두 4개 있을 수 있다.

해설

$x^2-x+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=1$
$\therefore\ \ f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$에서
즉, α,β는 $f(x)=1-x$의 두 근이다.
따라서, 다항식 $f(x)+x-1$은
$(x-\alpha)(x-\beta)$를 인수로 가진다.
그런데 $f(x)$가 이차식이므로
$f(x)+x-1=a(x-\alpha)(x-\beta)=a(x^2-x+1)$
$f(x)=ax^2-(a+1)x+a+1,$
$f(1)=a-(a+1)+a+1=1$
$\therefore\ \ a=1$
따라서, 구하는 이차식은 $f(x)=x^2-2x+2$