1. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=9,\ a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69 ② 70 ③ 71 ④ 72 ⑤ 73

해설

$a+b+c=3\cdots$①

$a^2+b^2+c^2=9\cdots$②

$a^3+b^3+c^3=24\cdots$③ 이라 하면,

②식에서

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$

$9-2(ab+bc+ca)=9$

$\therefore\ ab+bc+ca=0\quad\cdots$④

③식에서

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$24=3\cdot(9-0)+3abc$

$\therefore\ abc=-1\quad\cdots$⑤

$a^4+b^4+c^4+1$

$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$

$=81-2\cdot 6+1=70$

$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=0-2\times(-1)\times 3$

$=6)$

2. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6$, $f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \cdots + \alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

> $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$(단, $a_n\neq 0$)라고 놓으면
> $f(x+1)-f(x-1)$
> $=a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}+\cdots+$
> $a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
> $=\boxed{}x^{n-1}+\cdots=6x^2+6$
> 에서 $n=3,\ a_n=1$
> $\therefore\ f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+1$
> $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+4a_2x+2+2a_1$
> 이므로 $a_2=0,\ a_1=2$ 즉, $f(x)=x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$에 알맞은 것은?

① a_n ② $2a_n$ ③ na_n ④ $2na_n$ ⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$
$=a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$
$=a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\}+a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\}+\cdots$
$=a_n(2nx^{n-1}+\cdots)+a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\}+\cdots$
$=2na_nx^{n-1}+\{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$
$\therefore\ 2na_nx^{n-1}=6x^2$ 에서
$n-1=2,\ 2na_n=6$
$\therefore\ n=3,\ a_n=1$

3. x에 대한 다항식 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x-2)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $3b-2a$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$

$x^{10}\left(x^2+ax+b\right)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$이므로

$x^2+ax+b=(x-2)(x-\alpha)$라 할 수 있다.

$x^{10}(x-2)(x-\alpha)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$

$\therefore\ x^{10}(x-\alpha)=(x-2)Q(x)+2^{10}$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(2-\alpha)=2^{10}\ \therefore \alpha=1$

$\therefore\ x^2+ax+b=(x-2)(x-1)$

$=x^2-3x+2$

$a=-3,\ b=2$

$\therefore\ 3b-2a=12$

4. 모든 실수 x에 대하여$(x-1)^{10} = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_{10}$ 이 성립할 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값은? (단, a_i는 상수, $i = 0,\ 1,\ 2, \cdots, 10$)

① -2^{10} ② -2^9 ③ 2^9 ④ 2^{10} ⑤ 2^{55}

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0 \cdots$ ①

양변에 $x = -1$을 대입하면

$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} = 2^{10} \cdots$ ②

① − ②하면 $2(a_1 + a_3 + \cdots + a_9) = -2^{10}$

$\therefore\ a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = -2^9$

5. 임의의 자연수 k에 대하여 $x-k$로 나눈 나머지가 k인 다항식 $f(x)$의 개수를 구하면?

① 0개 ② 1개 ③ 2개

④ 3개 ⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k에 대하여 $\therefore\ f(k)=k$

따라서 $g(x)=f(x)-x$로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x)=0$이 성립

$\therefore\ g(x)=0$

즉, $f(x)=x$

$\therefore$ 1개

6. $P(x) = x^2+x+1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-4$ ② $4x-1$ ③ 5

④ 4 ⑤ 3

해설

$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2 + w + 1 = 0$, 양변에 $(w-1)$ 을 곱하면

$w^3 - 1 = 0$, $w^3 = 1$

$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b$ 에

w 를 대입하면,

$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$

$3 = aw + b$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

$\therefore$ 나머지$= 3$

7. 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$라 한다. $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(\alpha)$의 값은?

① 0　　② α　　③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$　　⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)+R_1$에서
$Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R_{n+1}이라 하면

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x)+R_2\}+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2Q_2(x)+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x)+R_3\}+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^3Q_3(x)+(x-\alpha)^2R_3+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&\qquad \vdots \\
&= (x-\alpha)^nQ_n(x)+(x-\alpha)^{n-1}R_n+ \\
&\qquad \cdots\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1
\end{aligned}
$$

따라서 $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를
$R(x)$라 하면

$R(x)=(x-\alpha)^{n-1}R_n+\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1$

$\therefore\ R(\alpha)=R_1=f(\alpha)$

8. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2이다. 다항식 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

① $2xQ(x)-2,\ -1$
② $2xQ(x)-1,\ -1$
③ $\frac{1}{2}xQ(x)-2,\ 1$
④ $\frac{1}{2}xQ(x)-1,\ 1$
⑤ $\frac{1}{2}xQ(x)+1,\ 2$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)Q(x)-2 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2Q(x)-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xf(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2x \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)-2\}-1 \end{aligned}$$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, x^2-4x+5, $(x-1)(x^2-4x+5)$ 로 나누면 나머지가 각각 4, $px+q$, $(x-r)^2$ 이 될 때, pqr 의 값은? (단, $r>0$)

① -24 ② -36 ③ 20 ④ 18 ⑤ 14

해설

$f(x)=(x^2-4x+5)Q(x)+px+q\cdots$①
$=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x-r)^2\cdots$②
$=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x^2-4x+5)+px+q\cdots$③
$f(1)=4$ 이므로 ②에서 $f(1)=(1-r)^2=4$
$r>0$ 이므로 $r=3$
②, ③을 비교해 보면
$(x-r)^2=(x^2-4x+5)+px+q$
$r=3$ 을 대입하면
$(x-3)^2=x^2+(p-4)x+(q+5)$
$\therefore\ p-4=-6,\ q+5=9$
$\therefore\ p=-2,\ q=4$
$\therefore\ pqr=-24$

10. 2003^{10}를 2002와 2004로 나눈 나머지가 각각 a, b일 때, $a-b$의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

2002를 x라 하면, $2003^{10} = (x+1)^{10}$

$(x+1)^{10} = xQ(x) + a$

$(x+1)^{10} = (x+2)Q(x) + b$

나머지 정리에 의해

$x = 0,\ x = -2$를 각각 대입하면,

$a = 1,\ b = 1$

$\therefore a - b = 0$

11. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2, f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 한다.
$f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x,\ f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(i) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ii) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(iii) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 2n = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -6, b = 12, c = -6$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$

12. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 없는 것은?

① $a+b$ ② $2a-2b$ ③ $2b-2a$

④ $2b-2c$ ⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\left\{a^2-(c+b)a+bc\right\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots$ ㉠

$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots$ ㉡

$=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots$ ㉢

$=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots$ ㉣

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$

㉡식 : 세항을 모두 더하면 0

㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$

㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

13. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3+\left(\frac{3}{1000}\right)^3-1$의 값과 같은 것은?

① $\frac{3^2\times 997^3}{10}$ ② $\frac{3^2\times 997^6}{10}$ ③ $-\frac{3^2\times 997^3}{10}$

④ $-\frac{3^2\times 997}{10^6}$ ⑤ $-\frac{3^2\times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$과 $\frac{3}{1000}$을 더해보면 $\frac{997+3}{1000}=1$이므로

$a=\frac{997}{1000}$, $b=\frac{3}{100}$, $c=-1$이라 하면

$a+b+c=0$이 된다.

따라서 $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서 $a^3+b^3+c^3=3abc$

임을 이용하면

$a^3+b^3+c^3=\left(\frac{997}{1000}\right)^3+\left(\frac{3}{1000}\right)^3+(-1)^3$의 값은

$3abc=3\times\frac{997}{1000}\times\frac{3}{1000}\times(-1)$와 같으므로

구하는 값은

$3\times\frac{997}{1000}\times\frac{3}{1000}\times(-1)=-\frac{3^2\times 997}{10^6}$

14. 세 변의 길이가 x, y, z인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore$ $x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because$ $x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 x, y, z는 $x+y\neq z$)

15. $10^{20}-4$ 과 $10^{30}-8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리 ② 11자리 ③ 12자리

④ 13자리 ⑤ 14자리

해설

$$
\begin{aligned}
10^{20}-4 &= (10^{10})^2-2^2 \\
&= \left(10^{10}-2\right)\left(10^{10}+2\right) \\
10^{30}-8 &= (10^{10})^3-2^3 \\
&= \left(10^{10}-2\right)\left(10^{20}+10^{10}\times 2+4\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 최대 공약수는 $2\left(10^{10}-2\right)=2\cdot 10^{10}-4$

$\therefore$ 11자리수

16. x에 대한 두 다항식 $A = x(x-a-4)(x+a^2-1)$, $B = (x+3)(x+a)(x+a^2-5)$의 최대공약수가 x에 대한 이차식이 되도록 하는 정수 a에 대하여 a^2+a의 값을 구하면?

① 20 ② 16 ③ 10 ④ 5 ⑤ 2

해설

ⅰ) A의 인수 x를 최대공약수의 인수라고 하면

B에서 $x=0$을 대입하면

$3a(a^2-5)=0$, $a=0(\because a$가 정수)

$\Rightarrow$두 식의 최대공약수는 이차가 아니다.

ⅱ) B의 인수 $x+3$이 최대공약수의 인수라고 하면

A에서 $x=-3$을 대입하면

$-3(-a-7)(a^2-4)=0$, $a=-7, 2, -2$

$a=-7, 2$일 때 A, B의 최대공약수는 일차식

$a=-2$일 때

즉, $(x+3)(x-2)$가 최대공약수가 이차식이다.

$\therefore\ a=-2,\ a^2+a=2$

17. 두 다항식 $x^3+x^2+x+3+m$, x^2-x+m이 서로소가 아닐 때, 상수 m의 값을 구하면?

① -1, 2 ② -2, 3 ③ -1, 2 ④ -1, 3 ⑤ -2, 2

해설

서로소가 아니라는 것은 일차이상의 공약수가 존재한다는 뜻이다.

$f(x)=x^3+x^2+x+3+m\cdots$㉠

$g(x)=x^2-x+m\cdots$㉡

으로 놓으면

$f(x)-g(x)=x^3+2x+3=(x+1)(x^2-x+3)$

㉠과 ㉡이 서로소가 아니므로 ㉠과 ㉡의 최대공약수는 $x+1$ 또는 x^2-x+3이다.

(ⅰ) $x+1$이 최대공약수일 때, $m=-2$

(ⅱ) x^2-x+3이 최대공약수일 때, 이 식과 $g(x)$는 서로 같아야 하므로 $m=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $m=-2$ 또는 3

18. 두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 몫을 Q_1 , 나머지를 R_1 이라 할 때, B 는 R_1 로 나누어 떨어지고 그 몫은 Q_2 이다. 이 때, A, B 의 최소공배수는? (단, A 의 차수가 B 의 차수보다 크다.)

① AB ② $\dfrac{AB}{R_1}$ ③ $\dfrac{AB}{Q_1}$

④ $\dfrac{AB}{Q_2}$ ⑤ $\dfrac{AB}{Q_1 Q_2}$

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A = BQ_1 + R_1 \cdots$ ㉠

$B = R_1 Q_2 \cdots$ ㉡

유클리드의 호제법에 의하여

A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R_1 의 최대공약수와 같다.

㉠, ㉡에서 B 와 R_1 의 최대공약수는 R_1 이므로

A 와 B 의 최대공약수는 R_1 이다.

따라서, A, B 의 최소공배수는 $\dfrac{AB}{R_1}$

19. 복소수 α, β 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단 $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
㉡ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
㉢ $\overline{\alpha}=\alpha$ 이면 α 는 실수이다.
㉣ $\overline{a}=\beta$ 이면 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

① ㉠,㉡,㉢ ② ㉠,㉢,㉣ ③ ㉡,㉢,㉣
④ ㉠,㉡,㉢,㉣ ⑤ ㉢,㉣

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1, \beta=i$ 일 때 $\alpha^2+\beta^2=0$
㉡ 반례 : $\alpha=1, \beta=i$ 일 때 $\alpha+\beta i=0$
㉢ $\overline{\alpha}=\alpha \to \alpha$ 는 실수(참)
㉣ $\alpha=a+bi,\ \overline{a}=\beta=a-bi(a,b$는 실수)
$\alpha+\beta=2a$(실수), $\alpha\beta=a^2+b^2$(실수) (참)

20. 복소수 α, β 는 $\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\alpha + \beta = i$에서 $\overline{\alpha + \beta} = \overline{i}$ $\quad \therefore\ \overline{\alpha} + \overline{\beta} = -i$

$\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$에서 $\overline{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$, $\overline{\beta} = \dfrac{1}{\beta}$

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \qquad \therefore\ \alpha\beta = -1$$

$$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = i^2 - 2 \cdot (-1) = 1$$

21. 복소수 α의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = \dfrac{1+i}{1-i}$일 때, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$는 실수, $a > 0$)라 두면

$\alpha^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = i$

$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = i$

$a^3 - 3ab^2 = 0 \cdots$ ㉠, $3a^2b - b^3 = 1 \cdots$ ㉡

㉠에서 $a^2 = 3b^2$ 을 얻어 ㉡에 대입하면

$$b = \frac{1}{2},\ a = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore\ \alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\begin{aligned}\alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}+i} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{\sqrt{3}-i}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

해설

$$\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = i + \frac{1}{i} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left\{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3\right\} = 0$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \neq 0, \alpha + \frac{1}{\alpha} > 0$$

($\because$ 복소수 α 의 실수부가 양이므로)

$$\therefore\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3}$$

22. 복소수 z가 $z^2 = \bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수의 개수를 구하면? (단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 무수히 많다.

해설

$z = a + bi$ (단, $a,\ b$는 실수)라 하면

$(a + bi)^2 = a - bi$

$a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$

$a^2 - b^2 = a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2ab = -b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $b = 0$ 또는 $a = -\dfrac{1}{2}$

(i) $b = 0$ 일 때 ㉠에서 $a^2 = a$

$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = 1$

(ii) $a = -\dfrac{1}{2}$ 일 때 ㉠에서 $\dfrac{1}{4} - b^2 = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서, $z = 0,\ 1,\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

23. $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$ 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 양변에 2를 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0 \cdots$①

$\therefore\ \alpha+1=-\alpha^2, \beta+1=-\beta^2$

①의 양변에 각각 $\alpha-1, \beta-1$ 을 곱하면

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0, (\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=1, \beta^3=1$

$(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$

$=(-\alpha^2)^{10}+(-\beta^2)^{10}$

$=(\alpha^3)^6\cdot\alpha^2+(\beta^3)^6\cdot\beta^2$

$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=-1\ (\because\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1\ )$

해설

$\alpha+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta+1=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha+1=A,\ \beta+1=B$ 라 하면

$A+B=1, AB=1$ 이므로 $A,\ B$ 는

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근 이다.

$(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1=0$

$\therefore x^3=-1, A^3=B^3=-1$

$$(\text{준식})=A^{10}+B^{10}=\left(A^3\right)^3\cdot A+\left(B^3\right)^3\cdot B$$
$$=-(A+B)$$
$$=-1$$

24. 실수 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_9가 $16 + x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_9 = 0$을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \cdots \times \sqrt{x_9}$의 값들의 곱을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 36 ⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times \cdots x_9 = -16$ 이므로

x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_9 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.

이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여

y_1, y_2, y_3, $\cdots$, y_m $(y_i > 0)$ 이라 하고 양수인 것들은

z_1, z_2, z_3, $\cdots$, z_n $(z_i > 0)$ 이라 하자.

그러면 $y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n = 16$ ($m + n = 9$, m :홀수)

i) $m = 4k + 1$ $(k = 0,\ 1,\ 2)$ 일 때,

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+1} \\
&= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\
&= 4i
\end{aligned}
$$

ii) $m = 4k + 3$ $(k = 0,\ 1)$ 일 때,

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+3} \\
&= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\
&= -4i
\end{aligned}
$$

$\therefore$ i), ii) 에서 $4i \times (-4i) = 16$

25. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 $< x >$로 나타낼 때, 방정식 $[x] + < x > = 7$의 해를 구하면?

① $\frac{7}{2}$ ② $3 \le x \le 4$ ③ $3 \le x < 4$
④ $3 < x \le 4$ ⑤ $3 < x < 4$

해설

x가 정수 k일 때,
$[x] = < x > = k$
$k < x < k+1$일 때,
$[x] = k, \ < x > = k+1$
따라서 $[x] + < x > = 7$이고
$[x], < x >$는 정수이므로
$[x] = 3, \ \ < x > = 4 \ (\because \ \ [x] \le < x >)$
$\therefore \ \ 3 < x < 4$

26. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\{1+(a+b)^2\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\left\{1+(a+b)^2\right\}$$

$$=1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2\geq 0$$

$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

즉, $(a+b+1)^2\leq 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$

$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$

$=3$

27. $x^2+kxy-2y^2+3y-1$ 이 $x,\ y$ 에 관한 일차식의 곱으로 인수분해되는 k 의 값을 구하면?

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±6

해설

$x^2+kyx-(2y^2-3y+1)=0$에서

$D=k^2y^2+4(2y^2-3y+1)$

$\quad=(k^2+8)y^2-12y+4$

이 식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=36-4(k^2+8)=0$

$\therefore k=\pm1$

28. x에 관한 이차방정식 $x^2+(m+1)x+(m^2-1)=0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하면? (단, m은 실수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$D=(m+1)^2-4(m^2-1)\geq 0,\ 3m^2-2m-5\leq 0,\ (3m-5)(m+1)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq m\leq \frac{5}{3}$

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-(m+1),\ \alpha\beta=m^2-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\{-(m+1)\}^2-2(m^2-1)$

$=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m=-1$일 때)

29. 방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$, $f(1) = 1$을 만족시키는 이차식 $f(x)$를 구하면?

① $f(x) = x^2 - x + 1$

② $f(x) = x^2 - 2x + 2$

③ $f(x) = x^2 + x - 1$

④ $f(x) = x^2 + 2x - 2$

⑤ $f(x)$는 모두 4개 있을 수 있다.

해설

$x^2 - x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 1$
$\therefore\ f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \alpha$에서
즉, α, β는 $f(x) = 1 - x$의 두 근이다.
따라서, 다항식 $f(x) + x - 1$은
$(x - \alpha)(x - \beta)$를 인수로 가진다.
그런데 $f(x)$가 이차식이므로
$f(x) + x - 1 = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - x + 1)$
$f(x) = ax^2 - (a + 1)x + a + 1$,
$f(1) = a - (a + 1) + a + 1 = 1$
$\therefore\ a = 1$
따라서, 구하는 이차식은 $f(x) = x^2 - 2x + 2$