

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 일 때, $f(x) - 2 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$ 가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 이므로
 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$
 $= x^3 + (-a + b)x^2 + (a - 1)x - b \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 x 에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.
즉, $-a + b = -3, a - 1 = 3, b = 1$
이므로 $a = 4, b = 1$
 $\therefore a + b = 5$

2. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ 을 $x - 2$, $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -8

② -2

③ -16

④ 4

⑤ 2

해설

$$f(x) = (x - 2)Q(x) + a$$

$$f(x) = (x - 1)Q'(x) + b$$

$$f(2) = 4 = a, \quad f(1) = -2 = b$$

$$\therefore a + b = 2$$

3. 다항식 $2x^3 + ax^2 + bx + 8$ 이 $x-1$ 과 $x-2$ 로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 a, b 의 값은?

① $a = -2, b = -8$

② $a = 3, b = 4$

③ $a = -1, b = -3$

④ $a = 4, b = -2$

⑤ $a = -3, b = 7$

해설

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 8$ 로 놓으면
 $x-1$ 과 $x-2$ 로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1) = 0, f(2) = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore f(1) = 2 + a + b + 8 = 0,$$

$$f(2) = 16 + 4a + 2b + 8 = 0$$

$$\therefore a + b = -10, 2a + b = -12$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, b = -8$

4. $(x^2 + x)(x^2 + x + 1) - 6$ 을 인수분해하면?

① $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 3)$ ② $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x - 3)$

③ $(x - 2)(x + 1)(x^2 + x + 3)$ ④ $(x - 1)(x + 2)(x^2 - x + 3)$

⑤ $(x + 1)(x - 2)(x^2 - x + 3)$

해설

$x^2 + x = X$ 라 하자.

$$(\text{준식}) = X(X + 1) - 6$$

$$= X^2 + X - 6$$

$$= (X + 3)(X - 2)$$

$$= (x^2 + x + 3)(x^2 + x - 2)$$

$$= (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 3)$$

5. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + a)(x + b)(x + c)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$
 $\therefore a + b + c = 4$

6. 두 다항식 $2x^2 + 2x - 4$ 와 $4x^3 - 4$ 에 관한 설명이다. 옳지 않은 것을 고르면?
- ① 두 다항식은 $(x - 1)$ 로 나누어 떨어지므로, $(x - 1)$ 은 두 다항식의 공약수이다.
- ② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.
- ③ $4(x - 1)^3(x + 2)^2(x^2 + x + 1)$ 은 두 다항식의 공배수이다.
- ④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x - 1)$ 이다.
- ⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x + 2)(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$ 이다.

해설

$$2x^2 + 2x - 4 = 2(x - 1)(x + 2)$$

$$4x^3 - 4 = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{최대공약수 : } 2(x - 1)$$

$$\text{최소공배수 : } 4(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)$$

7. 두 다항식 $x^2 - 4x + 3a + b$ 와 $x^2 + bx - 6$ 의 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 8

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + 3a + b,$$

$$g(x) = x^2 + bx - 6 \text{ 이라 하면}$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 $x - 2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(2) = g(2) = 0 \text{ 에서}$$

$$f(2) = 4 - 8 + 3a + b = 0, g(2) = 4 + 2b - 6 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1 \therefore a + b = 2$$

8. 사차식 $3x^4 - 5x^2 + 4x - 7$ 을 이차식 A 로 나누었더니 몫이 $x^2 - 2$ 이고 나머지가 $4x - 5$ 일 때, 이차식 A 를 구하면?

① $3x^2 - 2$

② $3x^2 - 1$

③ $3x^2$

④ $3x^2 + 1$

⑤ $3x^2 + 2$

해설

$$\text{검산식 : } 3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5$$

$$A = \frac{3x^4 - 5x^2 - 2}{x^2 - 2} = 3x^2 + 1$$

9. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① $ax + by = 0$ ② $a + b = x + y$ ③ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
④ $x = y$ ⑤ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

해설

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = 0 \text{ 을}$$

간단히 정리하면

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = 0$$

$$\text{즉, } (ay - bx)^2 = 0$$

$$\therefore ay - bx = 0 (\because a, x, b, y \text{ 는 실수})$$

$$\text{따라서, } ay = bx \text{ 에서 } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

10. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \text{ 에서} \\x + y &= 1 - z \\y + z &= 1 - x \\z + x &= 1 - y \\(x + y)(y + z)(z + x) &= (1 - z)(1 - x)(1 - y) \\&= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz \\&= 1 - 1 + 2 - 3 = -1\end{aligned}$$

11. 두 다항식 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$, $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
 $\therefore a = b \quad \therefore a - b = 0$

12. 다음 중에서 겹넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$

④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겹넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \therefore d = \sqrt{14}$
 $= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$
 $= 6^2 - 22 = 14$

13. x 에 대한 다항식 $(ax - 1)^3$ 의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x = 1$ 을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.

즉, $(a - 1)^3 = 125, a - 1 = 5$

$\therefore a = 6$

14. x 에 대한 다항식 $x^3 + kx^2 + kx - 1$ 을 $x - 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, R_1 , $x + 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, R_2 라 할 때, $R_1 = R_2$ 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^3 + kx^2 + kx - 1 &= (x - 2)Q_1(x) + R_1 \\ &= (x + 2)Q_2(x) + R_2\end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ 대입, } R_1 = 8 + 4k + 2k - 1 = 6k + 7$$

$$x = -2 \text{ 대입, } R_2 = -8 + 4k - 2k - 1 = 2k - 9$$

$$R_1 = R_2 \text{ 이므로 } 6k + 7 = 2k - 9$$

$$\therefore k = -4$$

15. 다항식 $f(x)$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ 일 때, $f(x)$ 를 $(2x-1)(3x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12x-3$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ 을 각각 양변에 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $12x-3$

16. 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$, $x+2$ 로 나누었을 때, 나머지가 각각 5, 3이라 한다. 이 때, 다항식 $f(x)$ 를 x^2-4 로 나눈 나머지를 구하면 $ax+b$ 이다. $4a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$f(2) = 5, f(-2) = 3$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 2)(x + 2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$f(2) = 2a + b = 5, f(-2) = -2a + b = 3$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 4$$

17. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때의 나머지는 3이고, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 1이다. 이 다항식을 $(x-1)(x-2)$ 로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$ 라고 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \\f(1) &= a + b = 3, \quad f(2) = 2a + b = 1 \\a &= -2, \quad b = 5 \\\therefore a + b &= 3\end{aligned}$$

18. $2^{16} - 1$ 은 1과 10사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 임을 이용하여 $2^{16} - 1$ 을 인수분해하면

$$2^{16} - 1 = (2^8)^2 - 1^2$$

$$= (2^8 + 1)(2^8 - 1)$$

$$= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^4 - 1)$$

$$= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2^2 - 1)$$

$$= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1)$$

$$= 257 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 3$$

따라서 $2^{16} - 1$ 을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10사이의 수

즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

19. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 20m이고 대각선의 길이가 3m일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m²인가?

① 12m² ② 13m² ③ 14m² ④ 15m² ⑤ 16m²

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$4(a + b + c) = 20, a + b + c = 5$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

$$\begin{aligned} \text{(겉넓이)} &= 2(ab + bc + ca) \\ &= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 25 - 9 = 16(\text{m}^2) \end{aligned}$$

20. $x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 14$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $xy = -1$

② $x^2 + y^2 = 6$

③ $x^4 + y^4 = 34$

④ $x^5 + y^5 = 86$

⑤ $x^6 + y^6 = 198$

해설

① $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ 에서

$$14 = 2^3 - 3xy \times 2$$

$$\therefore xy = -1$$

② $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ 에서

$$x^2 + y^2 = 2^2 - 2(-1) = 6$$

③ $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$ 에서

$$x^4 + y^4 = 6^2 - 2(-1)^2 = 34$$

④ $x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y)$ 에서

$$x^5 + y^5 = 6 \times 14 - (-1)^2 \times 2 = 82 \neq 86$$

⑤ $x^6 + y^6 = (x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3$ 에서

$$x^6 + y^6 = 14^2 - 2(-1)^3 = 198$$

21. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나눈 나머지는 $2x + 1$ 이고, $g(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눈 나머지는 $x - 4$ 이다. 이 때, $(x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 을 $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 7 ② 9 ③ 13 ④ 17 ⑤ 23

해설

$f(x) = (x^2 - 4)p(x) + 2x + 1$ 에서 $f(2) = 5$
 $g(x) = (x^2 - 5x + 6)q(x) + x - 4$ 에서 $g(3) = -1$
 $h(x) = (x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 이라 놓으면,
 $h(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지는
 $h(2) = 4f(2) + 3g(3) = 17$

22. 1999개의 다항식 $x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 2, \dots, x^2 - 2x - 1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

- ① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2 - 2x - n = (x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면 ($1 \leq n \leq 1999$ 인 자연수)

$$ab = n, a = b - 2$$

$\therefore n = 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots, 43 \cdot 45 (= 1935)$ 의 43개

23. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y) \\ &= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\} \\ &= (x-y)(x+y+1)^2 \\ &p = -1, q = 1, r = 1 \\ &\therefore p^2 + q^2 + r^2 = 3 \end{aligned}$$

24. 다음 보기 중 $ab(b-a) + ac(c-a) + bc(2a-b-c)$ 의 인수인 것을 모두 고르면?

☐ $a-b$	☐ $b+c$	☐ $a-c$
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

- ☐ ① ☐
- ☐ ② ☐
- ☐ ③ ☐ ☐
- ☐ ④ ☐ ☐
- ☒ ⑤ ☐ ☐ ☐

해설

$$\begin{aligned} & ab(b-a) + ac(c-a) + bc(2a-b-c) \\ &= ab^2 - a^2b + ac^2 - a^2c + 2abc - b^2c - bc^2 \\ &= -(b+c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a - bc(b+c) \\ &= -(b+c)(a^2 - (b+c)a + bc) \\ &= -(b+c)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b+c)(c-a) \end{aligned}$$

25. $a - b = 1 + i, b - c = 1 - i$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

$a - b = 1 + i \cdots \cdots \textcircled{1}$

$b - c = 1 - i \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 계산하면 $a - c = 2$

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \}$

$= \frac{1}{2} \{ (1 + i)^2 + (1 - i)^2 + (-2)^2 \}$

$= \frac{1}{2} \{ 1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1 + 4 \}$

$= 2$

26. $a + b + c = 0$ 일 때, 다음 중 $2a^2 + bc$ 와 같은 것은?

① $(a - c)^2$

② $(b + c)^2$

③ $(a + b)(b + c)$

④ $(a - b)(a - c)$

⑤ $(a - b)(a + c)$

해설

$$\begin{aligned} 2a^2 + bc &= 2a^2 - b(a + b) \quad (\because c = -a - b) \\ &= 2a^2 - ab - b^2 \\ &= (a - b)(2a + b) \\ &= (a - b)(a + b + a) \\ &= (a - b)(a - c) \quad (\because a + b = -c) \end{aligned}$$

27. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서
 $(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$
 $(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$
(좌변)
 $= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$
 $= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
 $= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$
따라서, $2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0$ 이므로 $a^2 + b^2 = c^2$
그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

28. 다항식 $x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$ 을 삼차식 $x^3 + x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지는?
- ① $x^2 - 3$ ② $x^2 + x - 2$ ③ $-x^2 - 1$
④ $-x^2 + x$ ⑤ $x - 1$

해설

$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $a - b + c = -2 \cdots \textcircled{1}$
 $(x^2)^{1002} \times x + (x^2)^2 \times x + x^2 \times x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 에서 양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면 $x + x - x + 1 = -a + bx + c$
 $x + 1 = bx + c - a$
 $\therefore b = 1, c - a = 1 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = -1, b = 1, c = 0$
 $\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

해설

$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면 좌변이 $x + 1$
즉, 좌변의 식을 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 1$
따라서 $ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1$
 $x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + x + 1 = (x^2 + 1)((x + 1)Q(x) + a) + x + 1$
양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $-2 = 2a$
 $\therefore a = -1$
 $\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

29. 다항식 x^6 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 할 때, $Q(x)$

를 $x + \frac{1}{2}$ 로 나눌 때의 나머지는?

- ① $\frac{1}{64}$
- ② $-\frac{1}{32}$
- ③ $\frac{3}{32}$
- ④ $-\frac{3}{16}$
- ⑤ $\frac{1}{16}$

해설

나머지정리에 의하여 $R = \left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$a = -\frac{1}{2}$ 로 놓으면

$R = a^6$

$x^6 = (x - a)Q(x) + a^6$ 에서

$Q(x) = \frac{x^6 - a^6}{x - a}$

$= x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5$

$Q(x)$ 를 $x - a$ 로 나눈 나머지는 $Q(a)$ 의 값과 같으므로 $Q(a) = 6a^5$

따라서 $Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{3}{16}$

30. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, x^2-4x+5 , $(x-1)(x^2-4x+5)$ 로 나누면 나머지가 각각 4, $px+q$, $(x-r)^2$ 이 될 때, pqr 의 값은? (단, $r > 0$)

- ① -24 ② -36 ③ 20 ④ 18 ⑤ 14

해설

$f(x) = (x^2 - 4x + 5)Q(x) + px + q \cdots \textcircled{1}$
 $= (x-1)(x^2 - 4x + 5)Q'(x) + (x-r)^2 \cdots \textcircled{2}$
 $= (x-1)(x^2 - 4x + 5)Q'(x) + (x^2 - 4x + 5) + px + q \cdots \textcircled{3}$
 $f(1) = 4$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에서 $f(1) = (1-r)^2 = 4$
 $r > 0$ 이므로 $r = 3$
 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 비교해 보면
 $(x-r)^2 = (x^2 - 4x + 5) + px + q$
 $r = 3$ 을 대입하면
 $(x-3)^2 = x^2 + (p-4)x + (q+5)$
 $\therefore p-4 = -6, q+5 = 9$
 $\therefore p = -2, q = 4$
 $\therefore pqr = -24$

31. a, b 가 양의 정수이고, 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ 이다. $f(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 를 인수로 갖게 하는 정수 α 의 값과 $a, b(a > b)$ 의 값에 대하여 $\alpha^2 + a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

a 가 될 수 있는 상수항 -2 의 약수인 $\pm 1, \pm 2$ 을 준식에 차례로 대입해 보면

$$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0, a + b = 0$$

$$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0, a + b = 0$$

$$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0, 4a + b = -9$$

$$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0, 4a + b = 9$$

그런데, 위의 세 식은 a, b 가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$$\therefore \alpha = -2 \text{ 이고 } 4a + b = 9$$

$$\alpha = -2, a = 2, b = 1 (\because a > b)$$

$$\therefore \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$$

32. $10^{20} - 4$ 과 $10^{30} - 8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리

② 11자리

③ 12자리

④ 13자리

⑤ 14자리

해설

$$\begin{aligned}10^{20} - 4 &= (10^{10})^2 - 2^2 \\&= (10^{10} - 2)(10^{10} + 2) \\10^{30} - 8 &= (10^{10})^3 - 2^3 \\&= (10^{10} - 2)(10^{20} + 10^{10} \times 2 + 4) \\\therefore \text{최대 공약수는 } &2(10^{10} - 2) = 2 \cdot 10^{10} - 4 \\\therefore &11\text{자리수}\end{aligned}$$

33. x 에 대한 두 다항식 $A = x(x - a - 4)(x + a^2 - 1)$, $B = (x + 3)(x + a)(x + a^2 - 5)$ 의 최대공약수가 x 에 대한 이차식이 되도록 하는 정수 a 에 대하여 $a^2 + a$ 의 값을 구하면?

- ① 20
- ② 16
- ③ 10
- ④ 5
- ⑤ 2

해설

i) A 의 인수 x 를 최대공약수의 인수라고 하면
 B 에서 $x = 0$ 을 대입하면
 $3a(a^2 - 5) = 0, a = 0$ ($\because a$ 가 정수)
 $\Rightarrow$ 두 식의 최대공약수는 이차가 아니다.
ii) B 의 인수 $x + 3$ 이 최대공약수의 인수라고 하면
 A 에서 $x = -3$ 을 대입하면
 $-3(-a - 7)(a^2 - 4) = 0, a = -7, 2, -2$
 $a = -7, 2$ 일 때 A, B 의 최대공약수는 일차식
 $a = -2$ 일 때
즉, $(x + 3)(x - 2)$ 가 최대공약수가 이차식이다.
 $\therefore a = -2, a^2 + a = 2$