1. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$ ㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

2. $f(x) = x^2 - ax + 1$ 이 $x - 1$ 로 나누어 떨어질 때 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$

$\therefore\ a = 2$

3. 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3$을 일차식 $x - 1$로 나누어 떨어지도록 a의 값을 정하면?

① -2　② -4　③ -6　④ -8　⑤ -10

해설

$f(1) = 1 + a + 3 = 0$, $a = -4$

4. 다음 중 다항식 $x^4 - 5x^2 + 4$를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x-3$ ④ $x+1$ ⑤ $x+2$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2-1)(x^2-4) \\ &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

5. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

(좌 변) $= (x^2 + 2)^2 - x^2$

$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

6. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-x+2가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해 될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

7. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$
좌변을 $2x - 1$ 로 나누면
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$
$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

8. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$ 을 다항식 $P(x)$로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$ ② x^2-a^2

③ $2x^2+3ax+a^2$ ④ $2x^2-3ax-a^2$

⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$ 이므로

$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$

따라서, 다항식 $P(x)$는 $2x^2+5ax-3a^2$ 을 $x+3a$로 나눈 몫이므로

$P(x)=2x-a$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)P(x) &= (x+a)(2x-a)\\ &= 2x^2+ax-a^2\end{aligned}$$

9. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6
④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설
(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

10. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3　　② 3^3-3^4　　③ 0

④ 1　　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$ 을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$=(A+x^4)^3$

$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$

$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$ 은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

11. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15　② 18　③ 21　④ 26　⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

12. $x^2-x+1=0$일 때, $x^5+\dfrac{1}{x^5}$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^2-x+1=0$, 양변에 $x+1$을 곱하면,
$(x+1)(x^2-x+1)=0$
$x^3+1=0$, $x^3=-1$에서 $x^5=x^3\times x^2=-x^2$
$x^5+\dfrac{1}{x^5}=-\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\cdots$①
$x^2-x+1=0$를 x로 나누어 정리한다.
$x+\dfrac{1}{x}=1$
$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=-1$
① 에 대입하면, $x^5+\dfrac{1}{x^5}=1$

13. x^3-4x^2+ax+b를 $(x+1)^2$으로 나누면 나머지가 7이 될 때, $a+b$의 값은?

① -12 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 12

해설

직접 나눠본다.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-6 \\
\hline
x^2+2x+1 & x^3-4x^2+\qquad ax+b \\
- & x^3+2x^2+\qquad x \\
\hline
 & \quad -6x^2+(a-1)x+b \\
- & \quad -6x^2-\quad 12x-6 \\
\hline
 & \qquad (a+11)x+b+6
\end{array}
$$

나머지가 7이므로 $a+11=0,\ b+6=7$

$\therefore\ a=-11,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-10$

해설

x^3-4x^2+ax+b

$=(x+1)^2(x+k)+7$

$=x^3+(k+2)x^2+(2k+1)x+k+7$

계수를 비교하면

$k+2=-4, 2k+1=a, k+7=b$

$k=-6$이므로 $a=-11, b=1$

$\therefore a+b=-10$

14. $(x^3-x^2-2x+1)^5=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{15}(x-1)^{15}$ 일 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{15}\cdots$ ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{15}\quad\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2=2\,(a_0+a_2+\cdots+a_{14})$ 이다.

$\therefore\ a_0+a_2+\cdots a_{14}=1$

15. x^4 을 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R_1 이라 하자. R_1 을 구하고, 이 때, $Q(x)$ 를 $x-\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫 $Q_1(x)$ 을 구하면?

① $R_1 = \frac{1}{16},\ Q_1(x) = (x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{4})$
② $R_1 = \frac{1}{16},\ Q_1(x) = (x+\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{4})$
③ $R_1 = \frac{1}{16},\ Q_1(x) = (x^2-\frac{1}{4})$
④ $R_1 = \frac{1}{16},\ Q_1(x) = x^2+\frac{1}{4}$
⑤ $R_1 = \frac{1}{16},\ Q_1(x) = x+\frac{1}{2}$

해설

$x^4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q_1(x) + R_1$

(1) 양변에 $x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = R_1 \quad \therefore\ R_1 = \frac{1}{16}$

(2) $x^4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q_1(x) + \frac{1}{16}$ 이므로

$x^4 - \frac{1}{16} = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q_1(x)$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$

$= \left(x+\frac{1}{2}\right)Q_1(x)$

$Q_1(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$

$\therefore$ 구하는 몫은 $x^2+\frac{1}{4}$

16. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -3이고, $x-3$으로 나눈 나머지가 5이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x-1$

해설

$f(-1)=-3,\ f(3)=5$

$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

$-a+b=-3,\ 3a+b=5$

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ ax+b=2x-1$

17. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x-2$로 나누어서 떨어진다. 이 다항식을 $(x+1)(x-2)$로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $-x+2$ ③ $x-1$

④ 2 ⑤ 3

해설

$R(x) = ax + b$라 두면

$R(-1) = -a + b = 3,\ R(2) = 2a + b = 0$

$a = -1,\ b = 2$이므로 $R(x) = -x + 2$

18. $2x^3+9x^2+11x+7=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 x에 대한 항등식일 때, $a,\ b,\ c, d$를 차례로 구하면?

① $3,\ -1,\ 3,\ 2$　　② $2,\ 3,\ -1,\ 3$
③ $-3,\ 1,\ -3,\ -2$　　④ $-2,\ -3,\ 1,\ -3$
⑤ $1,\ -3,\ 4,\ -2$

해설

조립제법을 이용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 2 & 9 & 11 & 7 & \\
 & & -2 & -7 & -4 & \\
\hline
-1 & 2 & 7 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow\ \mathrm{d} \\
 & & -2 & -5 & & \\
\hline
-1 & 2 & 5 & \boxed{-1} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & -2 & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{3} & \leftarrow \mathrm{b} & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & &
\end{array}
$$

$a=2,\ b=3,\ c=-1,\ d=3$

19. 세 실수 a, b, c가 다음 세 조건을 만족한다.

$$\boxed{a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1}$$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서

$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(1-c)(1-a)(1-b)$

$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

$=1-1+1-1=0$

20. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26　② 48　③ 84　④ 96　⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$
$49=21+2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ ab+bc+ca=14$
$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=(14)^2-2(8\times7)$
$=84$

21. 어떤 일차식 $g(x)$에 대하여
$x^4+2x^3-3x^2-g(x)=\left\{(x-\alpha)(x-\beta)\right\}^2$가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{우변}) &= \{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2 \\
&= \left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}^2 \\
&= x^4-2(\alpha+\beta)x^3 \\
&\quad + \left\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\right\}x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2 \\
&= x^4+2x^3-3x^2-g(x)
\end{aligned}
$$

$g(x)$가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면
$-2(\alpha+\beta)=2,\ (\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-3$
$\therefore\ \alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-2$

22. $x^{113}+1$을 x^3+x로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하자. 이때, $R(2006)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$x^{113}+1 = (x^3+x)Q(x)+R(x)$$
$$= x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

항등식이므로 $x=0, x^2=-1$을 각각 대입하면,

$1=c,\ x+1=-a+bx+c$

$\therefore a=0,\ b=1$

$\therefore R(x)=x+1$

따라서 $R(2006)=2007$

23. $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$
② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$
③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$
④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$x^4+2x^3-2x^2+2x-3$
$=(x^4-2x^2-3)+2x^3+2x$
$=(x^2-3)(x^2+1)+2x(x^2+1)$
$=(x^2+1)(x^2+2x-3)$
$=(x^2+1)(x+3)(x-1)$

24. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$ 이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$ 이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

25. 세 변의 길이가 $a,\ b,\ c$인 삼각형에 대하여 $(a^2+b^2)c+(a+b)c^2 = (a+b)(a^2+b^2)+c^3$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b=c$인 이등변 삼각형　② a가 빗변인 직각삼각형

③ $a=c$인 이등변 삼각형　④ c가 빗변인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 c에 관한 내림차순으로 정리하면

$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$ 에서

$c^2\{c-(a+b)\}-(a^2+b^2)\{c-(a+b)\}$

$=\{c-(a+b)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$

$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

$a\ ,b\ ,c$ 는 삼각형의 세변이므로

$c-a-b\neq 0$이고 $c^2-a^2-b^2=0$

즉 $c^2=a^2+b^2$이므로 c가 빗변인 직각 삼각형이다.

26. 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = a^2 + bc$라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$일 때, $[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$의 값은?

① 10 ② 22 ③ 88 ④ 100 ⑤ 144

해설

$[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$
$= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
$= (x + y + z)^2 = 100$

27. 두 다항식 x^3+px^2+qx+1과 x^3+qx^2+px+1의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$A=x^3+px^2+qx+1$, $B=x^3+qx^2+px+1$이라고 하면

$$\begin{aligned} A-B &= (x^3+px^2+qx+1)-(x^3+qx^2+px+1) \\ &= (p-q)x^2-(p-q)x \\ &= (p-q)x(x-1) \end{aligned}$$

이 때, $A-B$는 두 다항식 A, B의 최대공약수를 인수로 갖는다.
그런데, $p=q$이면 $A=B$가 되어 최대공약수가 x에 대한 삼차식이 되므로 최대공약수가 x에 대한 일차식이라는 조건에 모순이다.
또한, 두 다항식 A, B의 상수항이 모두 1이므로 x를 인수로 가질 수 없다.
따라서, $x-1$이 두 다항식 A, B의 최대공약수이고, 최대공약수는 A, B의 인수이므로 $x=1$을 두 다항식에 각각 대입하면 그 값이 0이어야 한다.
$1+p+q+1=0$, $1+q+p+1=0$
$\therefore\ p+q=-2$

28. 다음은 유클리드 호제법 '두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.' 를 보이는 과정이다.

$A,\ B$ 의 최대공약수를 G 라 하면, $A = Ga,\ B = Gb$ (단, $a,\ b$ 는 서로소)로 나타낼 수 있다. A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면 $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$ $\therefore\ R = G(a - bQ)$ 즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다. 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면 (가) m (일차이상의 다항식) 이 존재하여 $b = mk,\ a - bQ = mk'$ 이 성립한다. $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$ 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다. $B = Gb,\ R = G(a - bQ)$ 에서 b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

(　) 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

① 공약수, 공약수
② 공약수, 서로소
③ 공약수, 공배수
④ 공배수, 서로소
⑤ 공배수, 공약수

해설

$A,\ B$ 의 최대공약수를 G 라 하면
$A = Ga,\ B = Gb$ (단, $a,\ b$ 는 서로소) 이고,
A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
$A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = (a - bQ)G$
즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
공약수인 m 이 존재하여
$b = mk,\ a - bQ = mk'$
$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
$B = Gb,\ R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

29. 다항식 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1) = x^4+5x^2+3$을 만족시킨다. $f(x^2-1)$을 구한 것은?

① x^4+5x^2+1 ② x^4+x^2-3 ③ x^4-5x^2+1
④ x^4+x^2+3 ⑤ 답 없음

해설

$x^2+1=t$라 하면 $x^2=t-1$
주어진 식에 대입하면
$f(t)=(t-1)^2+5(t-1)+3$
$\therefore\ f(t)=t^2+3t-1$

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2+3(x^2-1)-1 \\ &= x^4+x^2-3 \end{aligned}$$

30. $x^2 - x - 1 = 0$일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$의 값은?

① 4, −1 ② 4, 18 ③ 8, −1 ④ 9, −1 ⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$의 양변을 x로 나누면

$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$

$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$

$$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$일 때

$y + \frac{1}{y} = 1$에서 $\frac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$을 곱하면 $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$

$y^3 + 1 = 0 \therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

31. 임의의 실수 x, y에 대해서

$$\boxed{y^{12}+1 = x_0 + x_1(y-1) + x_2(y-1)^2 + x_3(y-1)^3 + \cdots + x_{12}(y-1)^{12}}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$y=2$ 대입 : $2^{12}+1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$
$y=0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$
각변끼리 빼주면
$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로
$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

32. $f(x)=x^3-3x^2-x+3$, $g(x)=f(f(f(x)))$ 일 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지 $R(x)$에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $R(x)$는 0이다. ② $R(x)$는 일차식이다.

③ $R(x)$는 이차식이다. ④ $R(x)$의 상수항은 3이다.

⑤ $R(x)$의 상수항은 2이다.

해설

$f(x)=(x-3)(x-1)(x+1)$ 이고

$g(x)=f(x)Q(x)+R(x)$ 에서

$g(x)=(x-3)(x-1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $g(x)=f(f(f(x)))$ 이므로

$g(1)=f(f(f(1)))=f(f(0))=f(3)=0$

$g(-1)=f(f(f(-1)))=f(f(0))=f(3)=0$

$g(3)=f(f(f(3)))=f(f(0))=f(3)=0$

$\therefore\ g(1)=a+b+c=0,\ g(-1)=a-b+c=0,$

$g(3)=9a+3b+c=0$

$\therefore\ a=b=c=0$

따라서 $R(x)=ax^2+bx+c=0$

33. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $a+b$　　② $2a-2b$　　③ $2b-2a$

④ $2b-2c$　　⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\left\{a^2-(c+b)a+bc\right\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots$ ㉠

$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots$ ㉡

$=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots$ ㉢

$=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots$ ㉣

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$

㉡식 : 세항을 모두 더하면 0

㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$

㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

34. x에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, $(x+1)f(x)=(x-1)g(x)$일 때, 다음 중 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는?

① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$
④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x)=(x-1)g(x)\cdots$①
$x+1$과 $x-1$이 서로 소이므로
$x+1$은 $g(x)$의 인수이다.
따라서 $g(x)=(x+1)h(x)\cdots$② 로 놓으면
①에서 $f(x)=(x-1)h(x)\cdots$③
②와 ③에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는
$(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

35. 두 다항식 $x^2 - x + p$ 와 $x^3 + x^2 + x + p + 3$ 이 사차식의 최소공배수를 갖도록 p 의 값을 정하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

다항식 $A,\ B$ 의 최소공배수 L , 최대공약수를 G 라 하면
$AB = GL$ 에서 G 는 1 차식이다. ($\because$ AB는 5차식, G는 4차식)
$\therefore$ 최대공약수는 $x+1,\ x+1$은 $x^2 - x + p$ 의 약수이므로
$2 + p = 0$
$\therefore\ p = -2$