1. 다항식 $x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$의 차수는?

① 2차 ② 3차 ③ 6차 ④ 7차 ⑤ 8차

해설

$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$

$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$

$\therefore$ 6차 다항식

2. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

① 0　　② 2　　③ -2　　④ 4　　⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은
(3차항)×(상수항), (2차항) ×(1차항)
2쌍씩이다.
$4\times1\times2+(-3)\times2\times2 \ =8+(-12)=-4$

3. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$$

$$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$

$$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

4. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$을 곱하면,

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -1$에서 $x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots\cdots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$를 x로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

① 에 대입하면, $x^5 + \dfrac{1}{x^5} = 1$

5. 등식 $(2k+1)y-(k+3)x+10=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

(준식)$=(y-3x+10)+(2y-x)k=0$

$\therefore 2y=x,\ \ y-3x=-10$

$\therefore x=4,\ \ y=2$

$\therefore x+y=6$

6. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값은?

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1, x=2$를 각각 대입하면
$x=-1$일 때,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$①
$x=2$일 때, $(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$②
①, ②를 연립하면
$m=\frac{2}{3},\ n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

7. $x^4 - 3x^2 + 1$을 인수분해 하면?

① $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ ② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

③ $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - x - 1)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

⑤ $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

$$
\begin{aligned}
x^4 - 3x^2 + 1 &= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 \\
&= (x^2 - 1)^2 - x^2 \\
&= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)
\end{aligned}
$$

8. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \leq -1,\ x \leq 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \leq -1,\ x \geq 3$이다.

⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면

$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \geq 0$(이차부등식이므로 $a \neq b$)

i) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq x \leq 3$

ii) $a>b$이면

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \geq 0$

$\therefore x \leq -1,\ x \geq 3$

9. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2kx - k + 6 > 0$이 항상 성립하도록 k의 범위를 구하면 $m < k < n$이다. 이 때, $m^2 + n^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x^2 + 2kx - k + 6 > 0$이 항상 성립하려면
판별식 $D < 0$이다.

$$\frac{D}{4} = k^2 - (-k + 6) < 0$$

$k^2 + k - 6 < 0$, $(k + 3)(k - 2) < 0$

$-3 < k < 2$

$\therefore m = -3,\ n = 2$

$\therefore\ m^2 + n^2 = (-3)^2 + 2^2 = 13$

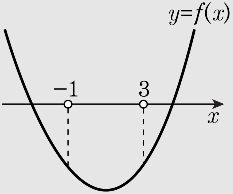
10. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0,\ f(3) \le 0$이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0,\ k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$
(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0,\ 9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\dfrac{1}{3}$
(i), (ii)에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

11. $x^2+x-1=0$ 일 때, x^5-5x 의 값을 구하면?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -3

해설

x^5-5x 를 x^2+x-1 로 나누면

즉, $x^5-5x=(x^2+x-1)\times$ 몫-3

$x^2+x-1=0$

$\therefore\ x^5-5x=-3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$x^2=-x+1$

$$\begin{aligned} x^5-5x &= (x^2)^2\times x-5x \\ &= x(-x+1)^2-5x \\ &= x^3-2x^2-4x \\ &= x(-x+1)-2(-x+1)-4x \\ &= -x^2-x-2 \\ &= -(x^2+x)-2 \\ &= -1-2=-3 \end{aligned}$$

12. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28 ② 26 ③ 15 ④ 14 ⑤ 13

해설

양변에 $x=1$을 대입하면

$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉡

㉠ – ㉡ : $26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$

13. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\}+21x^2\\ &= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18)+21x^2\\ &= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\}+21x^2\\ &= (x^2-18)^2-4x(x^2-18)-21x^2+21x^2\\ &= (x^2-18)(x^2-4x-18)\end{aligned}$$

따라서 $p=-18$, $g=-4$

$\therefore pg=(-18)\times(-4)=72$

14. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서
$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\therefore\ \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore\ a=b=c$ ($\because a,\ b,\ c$는 실수)
따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그 넓이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,
$a^2=1$
$\therefore\ a=b=c=1$
$\therefore\ a+b+c=3$

15. 두 다항식 $x^2+4x+2k$와 x^2+3x+k의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 k값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A=x^2+4x+2k,\ B=x^2+3x+k$라고 하면 $A-B=x+k$
$A-B$는 최대공약수 G를 인수로 갖고,
주어진 조건에서 두 식의 최대공약수가 일차식이므로
두 식의 최대공약수는 $x+k$이다.
$A,\ B$는 최대공약수 $x+k$를 인수로 가지므로
A에 $x=-k$를 대입하면
$k^2-2k=0,\ k(k-2)=0$
$\therefore\ k=0$ 또는 $k=2$
따라서, k값들의 합은 2이다.

16. 두 다항식 x^2+3x+p, x^2+px+q의 최소공배수가 $x^3-13x+12$일 때, $p+q$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$x^3-13x+12=(x-1)(x-3)(x+4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.
$(\because\ AB=GL)$
ⅰ) G.C.M. $=x-1$이면 $p=-4,\ q=3$
이 때 두 식은 $(x-1)(x+4)$, $(x-1)(x-3)$이므로 조건에 맞는다.
ⅱ) G.C.M. $=x-3$이면 $p=-18,\ q=45$
이 때 두 식은 $(x-3)(x+6)$, $(x-3)(x-15)$이므로 조건에 맞지 않는다.
ⅲ) G.C.M. $=x+4$일 때도 ⅱ)와 같음
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $p+q=-1$

17. 두 다항식 $f(x)=x^3+x^2+ax-3$,$g(x)=x^3-x^2+bx+3$의 최대공약수 $G(x)$가 x의 이차식일 때, ab를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$f(x)=x^3+x^2+ax-3$$
$$g(x)=x^3-x^2+bx+3$$
$$f(x)-g(x)=2x^2+(a-b)x-6$$
$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=2x^3+(a+b)x\\&=x\{2x^2+(a+b)\}\end{aligned}$$

$G(x)$ 는 $f(x)-g(x), f(x)+g(x)$ 의 공약수이다.

$\therefore\ 2x^2+(a-b)x-6=2x^2+(a+b)$

$a-b=0,\ a+b=-6$

$\therefore\ a=-3, b=-3$, $ab=9$

18. $a < 0$이고 $a + b = 0$일 때, 부등식$(a - b)x - a - 2b < 0$의 해는?

① $x < -\frac{1}{2}$　　② $x > -\frac{1}{2}$　　③ $x > 2$

④ $x < -2$　　⑤ $x > 1$

해설

$a + b = 0$에서 $b = -a$를 부등식에 대입하면

$(a + a)x - a + 2a < 0,\ 2ax + a < 0,\ 2ax < -a$

$\therefore\ x > -\frac{1}{2} (\because\ 2a < 0)$

19. $A : 0.4 - 0.25x \le 1.5x - 1.35$, $B : -\dfrac{1-2x}{4} < \dfrac{2-x}{2} - \dfrac{x-1}{3}$가 있다. A에서 B를 제외한 수는?

① $x < 1$　② $x \ge 1$　③ $x < \dfrac{19}{16}$

④ $x \le \dfrac{19}{16}$　⑤ $x \ge \dfrac{19}{16}$

해설

$0.4 - 0.25x \le 1.5x - 1.35$의 양변에 100을 곱하면

$40 - 25x \le 150x - 135$

$175 \le 175x$

$1 \le x$

$A : 1 \le x$

$-\dfrac{1-2x}{4} < \dfrac{2-x}{2} - \dfrac{x-1}{3}$의 양변에 12를 곱하면

$-3(1-2x) < 6(2-x) - 4(x-1)$

$-3 + 6x < 12 - 6x - 4x + 4$

$x < \dfrac{19}{16}$

$B : x < \dfrac{19}{16}$이므로

A에서 B를 제외한 수는 $x \ge \dfrac{19}{16}$이다.

20. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $a \geq b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 없다.
㉡ $a \geq b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$ 의 해는 $x > a$ 이다.
㉢ $a > b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$ 의 해는 없다.
㉣ $a < b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x < -a+1 \\ x-1 > -b \end{cases}$ 의 해는 없다.
㉤ $a = b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$ 의 해는 1개이다.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 4 개

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉤은 모두 옳다.

㉣ $a < b$ 의 양변에 -1 을 곱하면 $-a > -b$

$-a > -b$ 의 양변에 같은 수 1 을 더하면 $1-a > 1-b$

$\begin{cases} x < -a+1 \\ x-1 > -b \end{cases}$ 을 정리하면 $\begin{cases} x < -a+1 \\ x > -b+1 \end{cases}$

그런데 위에서 $1-b < 1-a$ 가 성립되었기 때문에 $-b+1 < x < -a+1$ 이 성립한다.

따라서 해가 있다.

21. 부등식 $|x^2-1|+3x<3$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 상수 $\alpha+\beta$의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

절댓값 기호 안을 0으로 하는 x의 값을 경계로 하여 구간을 나누어 본다.

(i) $x^2-1\geq 0$,

즉 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때,

$|x^2-1|=x^2-1$이므로 주어진 부등식은

$x^2-1+3x<3,\ x^2+3x-4<0$

$(x+4)(x-1)<0$

$\therefore -4<x<1$

이 때 조건에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이므로

이를 만족하는 x값의 범위는 $-4\leq x\leq -1$

(ii) $x^2-1<0$,

즉 $-1<x<1$일 때,

$|x^2-1|=-x^2+1$이므로 주어진 부등식은

$-x^2+1+3x<3,\ x^2-3x+2>0$

$(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

이 때 조건에서 $-1<x<1$이므로

이를 만족하는 x의 값의 범위는 $-1<x<1$

(i), (ii)로부터 주어진 부등식의 해는 $-4<x<1$

따라서 $\alpha=-4,\ \beta=1,\ \alpha+\beta=-3$

22. 이차방정식 $x^2+(a-b)x+ab=1$이 a의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b의 범위를 정하면?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

② $b \le -\frac{\sqrt{2}}{2},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{2}}{3} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{3}$

④ $b \le -\frac{\sqrt{2}}{3},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{3}$

⑤ $b \le -2,\ b \ge 2$

해설

$x^2+(a-b)x+ab-1=0$에서

$D=(a-b)^2-4(ab-1)\ge 0$

이 식을 a에 관해서 정리하면, $a^2-6ba+b^2+4\ge 0$이

부등식이 a에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4} \le 0$

이므로

$\frac{D'}{4}=(3b)^2-(b^2+4)\le 0$

$\therefore\ 2b^2-1\le 0$에서

$(\sqrt{2}b+1)(\sqrt{2}b-1)\le 0$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le b \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

23. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ $b^2 - 4ac > 0$　　ㄴ $a + c < b$

ㄷ $a < 1$이고 $b < c$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 두 식의 판별식 값이
모두 $b^2 - 4ac$이고
$D > 0$이어야 해가 존재하므로 옳다.
ㄴ주어진 식에
1을 대입하면 성립한다.

24. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$의 두 근이 -1과 2 사이에 있도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$
② $2 < a < \frac{5}{2}$
③ $-2 < a < 4$
④ $-2 < a < \frac{5}{2}$
⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로

$D > 0$에서 $D = a^2 - 4 > 0$, $(a-2)(a+2) > 0$

$\therefore\ a > 2$ 또는 $a < -2$

(ii) $f(-1) > 0$에서 $1 + a + 1 > 0$

$\therefore\ a > -2$

(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$

$\therefore\ \frac{5}{2} > a$

(iv) 대칭축이 -1과 2 사이에 있어야 하므로

$-1 < \frac{a}{2} < 2$

$\therefore\ -2 < a < 4$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 $2 < a < \frac{5}{2}$

25. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\cdots+\frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 1997

④ 0　　⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2007})x^{2006}+\cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}=0$

26. x의 다항식 $f(x)$가 임의의 실수 u, v에 대하여 $f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$가 성립할 때, $f(3)$의 값은? (단, $f(1) = 1$이라고 한다.)

① -1 ② 2 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$가
u, v에 대한 항등식이므로
$u=1$, $v=0$일 때도 이 등식이 성립한다.
$\therefore\ f(1)f(0) = f(1) + f(1)$
$f(1) = 1$이므로 $f(0) = 2$
또, $u = v = 1$일 때는
$f(1)f(1) = f(2) + f(0)\quad \therefore\ f(2) = -1$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(3) &= f(2+1) = f(2)f(1) - f(2-1)\\ &= f(2)f(1) - f(1) = -1 - 1\\ &= -2\end{aligned}$$

27. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지도록 a, b의 값을 정할 때, $a + b$의 값을구하면?

① 1　② −1　③ 3　④ −4　⑤ −3

해설

(i) $f(x) = x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x)$

$f(1) = 1 + a + b = 0$

$\therefore\ b = -(a+1)$

(ii) $f(x) = x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x^4 - 1) + a(x-1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1)$

$= (x-1)^2 Q(x)$

$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1 + a = (x-1)Q(x)$

$x = 1$을 대입하면 $4 + a = 0\ \therefore\ a = -4$

$b = -(a+1)$에서 $b = 3$

$\therefore a + b = -1$

28. $P(x)=x^2+x+1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-4$ ② $4x-1$ ③ 5

④ 4 ⑤ 3

해설

$P(x^6)=x^{12}+x^6+1$

$x^2+x+1=0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2+w+1=0$, 양변에 $(w-1)$ 을 곱하면

$w^3-1=0$, $w^3=1$

$x^{12}+x^6+1=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$ 에

w 를 대입하면,

$(w^3)^4+(w^3)^2+1=(w^2+w+1)Q(w)+aw+b$

$3=aw+b$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a=0, b=3$

$\therefore$ 나머지$=3$

29. 다항식 $4x^3+6x^2-12x-11$을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 하고 다항식 $Q(-2x+3)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 r이라 할 때, $R+r$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$4x^3+6x^2-12x-11=(x+2)Q(x)+R$

$x=-2$을 대입하면 $R=5$

$4x^3+6x^2-12x-11=(x+2)Q(x)+5\cdots$ ㉠

$Q(-2x+3)=(x-1)Q'(x)+r$

$x=1$을 대입하면 $r=Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면,

$4+6-12-11=3Q(1)+5$에서 $Q(1)=r=-6$

$\therefore\ R+r=5+(-6)=-1$

30. 이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(a+b)$는? (단, a, b는 서로 다른 실수)

① $af(a)+bf(b)$

② $-af(a)+bf(b)$

③ $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$

④ $\dfrac{bf(a)-af(b)}{a-b}$

⑤ $bf(a)-af(b)$

해설

$R(x)=cx+d$라 하면

$f(a)=ac+d,\ f(d)=bc+d$

$\therefore\ f(a)-f(b)=(a-b)c$

$\therefore\ c=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

또 $f(a)+f(b)=(a+c)c+2d$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+2d$

$\therefore\ 2d=f(a)+f(b)-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{(a-b)\{f(a)+f(b)\}}{a-b}-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{1}{a-b}\Big[af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-\{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)\}\Big]$

$=\dfrac{1}{a-b}\{af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-af(a)+af(b)-bf(a)+bf(b)\}=\dfrac{2af(b)-2bf(b)}{a-b}$

$\therefore\ d=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

따라서 $R(a+b)=(a+b)c+d$

$=(a+b)\times\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)+af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$

31. 다항식 $A(x) = x^3 + px^2 + 3x + 1$을 다항식 $B(x) = x^2 + qx + 3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자. $B(x)$와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$일 때, $R(2)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$A = BQ + R$에서 A, B 의 $G.C.M.$과 B, R의 $G.C.M.$은 일치한다.
($\Leftarrow$ *Euclid* 호제법)
그러므로 $x-1$은 $A(x)$, $B(x)$의 공약수이다.
$\therefore$ $A(1) = 0$ 에서 $p = -5$,
$B(1) = 0$에서 $q = -4$
$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 4x + 3)Q(x) + a(x-1)$
양변에 $x = 3$을 대입하면 $-8 = 2a$ $\therefore$ $a = -4$
$\therefore$ $R(x) = -4(x-1)$ $\therefore$ $R(2) = -4$

32. 양의 유리수 a 에 대하여 $(n-1)^2 \leq a \leq n^2$ 을 만족하는 정수 n 을 $[a]$ 로 나타내기로 한다. 즉, $2^2 \leq 6 \leq 3^2$ 이면 $[6]=3$ 이 된다. $[x]=5$, $[y]=9$ 일 때, $[y-x]$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 9

해설

$[x]=5$ 이므로 $4^2 \leq x \leq 5^2$ $\therefore\ 16 \leq x \leq 25$

$[y]=9$ 이므로 $8^2 \leq y \leq 9^2$ $\therefore\ 64 \leq y \leq 81$

$y-x$ 의 범위를 구하면 $39 \leq y-x \leq 65$

즉, $6^2 \leq y-x \leq 9^2$ 이므로 $[y-x]$ 가 될 수 있는 값은 7, 8, 9 이다.

33. 어떤 공장에서 벨트와 신발을 만드는 데 드는 비용과 판매가는 다음과 같다.

	재료비(원)	가공비(원)	판매가(원)
벨트	5000	3000	10000
신발	4000	7000	15000

하루에 만드는 벨트와 신발의 개수의 합이 250 개이고, 재료비는 140 만원 이하, 가공비는 115 만원 이하가 되게 하려고 한다. 하루에 만든 벨트와 신발을 모두 팔았을 때, 최대 판매금액을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 3000000 원

해설

벨트의 개수를 x 개라 하고 신발의 개수를 y 개라 하면, $x+y=250$, $y=250-x$

재료비는 140 만원 이하이므로

$5000x+4000y \leq 1400000$,

$5x+4(250-x) \leq 1400 \cdots$ ㉠

가공비는 115 만원 이하이므로

$3000x+7000y \leq 1150000$,

$3x+7(250-x) \leq 1150 \cdots$ ㉡

㉠ 을 풀면 $x \leq 400$

㉡ 을 풀면 $x \geq 150$

$\therefore\ 150 \leq x \leq 400$

벨트와 신발을 모두 팔았을 때, 최대한 많은 금액을 받으려면, 신발을 많이 판매해야 하고 벨트는 적게 판매해야 한다.

따라서 $x=150$, $y=250-150=100$ 일 때,

최대 판매 금액은 $150\times10000+100\times15000=3000000$ (원) 이다.

34. 관희는 집에서 김밥을 50개 만들었다. 아직 앞으로 10개를 더 만 들 수 있는 재료가 남아있는 데, 얼만큼을 더 만들지는 모르겠다고 한다. 김밥은 5개가 들어가는 도시락과 8개가 들어가는 도시락에 나누어 담을 생각이고, 도시락의 수는 10개로 하려고 한다. 김밥이 8개가 들어가는 도시락의 최소의 개수와 최대의 개수를 순서대로 나열한 것으로 옳은 것은?

① 0개 , 1개　② 0개, 2개　③ 1개, 2개

④ 0개, 3개　⑤ 2개, 3개

해설

8개가 들어가는 도시락의 수를 x 개라고 두면 5개가 들어가는 도시락의 수는 $(10-x)$개이다. 이를 이용하여 김밥의 개수를 식으로 나타내면 $8x+5(10-x)$개이다. 김밥의 개수는 최소 50개, 최대 60개가 될 것이므로, $50 \le 8x+5(10-x) \le 60$ 이고 연립방정식으로 나타내면, $\begin{cases} 60 \ge 8x+5(10-x) \\ 8x+5(10-x) \ge 50 \end{cases}$ 이다. 간단히 하면 $\begin{cases} x \le \dfrac{10}{3} \\ x \ge 0 \end{cases}$ 이다. x 의 범위를 나타내면 $0 \le x \le \dfrac{10}{3}$ 이다.

따라서 김밥이 8개 들어가는 도시락의 수는 최소 0개, 최대 3개이다.

35. 두 이차함수 $f(x) = x^2 - x + 2a + 1$, $g(x) = 2x^2 - ax + 3a$에 대하여 $f(x) > g(x)$를 만족하는 실수 x가 존재하도록 a의 값의 범위를 정하면 $a < \alpha$ 또는 $a > \beta$이다. 이 때, 두 상수 α, β의 곱 $\alpha\beta$의 값은? (단, $\alpha < \beta$이다.)

① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(x) > g(x)$ 이므로 $x^2 - x + 2a + 1 > 2x^2 - ax + 3a$

$x^2 - (a-1)x + (a-1) < 0$

위의 부등식을 만족하는 x 의 값이 존재하려면

이차방정식 $x^2 - (a-1)x + (a-1) = 0$ 의 판별식을 D라 할 때,

$\mathrm{D} > 0$ 이어야 하므로 $\mathrm{D} = (\mathrm{a}-1)^2 - 4(\mathrm{a}-1) > 0$

$(a-1)(a-5) > 0$

$\therefore a < 1$ 또는 $a > 5$

따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 5$이므로 $\alpha\beta = 5$