

1. x 에 대한 항등식 $a(x+1) + b(x-1) = x+3$ 에서 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = -1$

해설

준식을 정리하면

$$(a+b)x + a - b = x + 3$$

계수비교법에 의하여

$$a+b=1, a-b=3$$

연립하여 풀면

$$\therefore a=2, b=-1$$

2. 등식 $(x - 2) + (2y + 3)i = -7i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

$$x - 2 = 0, 2y + 3 = -7$$

$$\therefore x = 2, y = -5$$

3. 이차방정식 $x^2 + 8x + 2k = 0$ 이 허근을 가지도록 하는 정수 k 의 값의 최솟값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

이차방정식에서 허근을 가질 조건은

$\frac{D'}{4} < 0$ 이어야 하므로,

$16 - 2k < 0, 2k > 16, \therefore k > 8$

$\therefore$ 정수 k 의 최소값은 9

4. 이차함수 $y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$

② $-\frac{5}{3}$

③ 0

④ $\frac{8}{3}$

⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$$y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x) = 9x^2 + 12x - 1$$

$$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$$p = -\frac{2}{3}, q = -5$$

$$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$$

5. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 4x \quad (1 \leq x \leq 5)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 4

▷ 정답 : 최솟값 -5

해설

$$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$$

꼭짓점 : $x = 2$ 일 때 $y = 4$

$$\text{양끝점 : } \begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$$

$x = 2$ 에서 최댓값 4

$x = 5$ 에서 최솟값 -5

6. a, b 는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$ 이 $x^2 - x - 1$ 로 나누어 떨어질 때, b 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$$ax^3 + bx^2 + 1$$

$$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$$

$$= ax^3 - (1 + a)x^2 + (1 - a)x + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$-(1 + a) = b, 1 - a = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

7. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x+1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.

주어진 식에 $x = -1$, $x = 2$ 를 각각 대입하면,

$$(-1)^3 + m(-1)^2 + n(-1) + 1 = 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(2)^3 + m(2)^2 + n \cdot 2 + 1 = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면,

$$m = \frac{2}{3}, n = -\frac{13}{3}$$

$$\therefore m - n = 5$$

8. 다항식 $f(x)$ 를 두 일차식 $x-1$, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$

② $-x+3$

③ $x-3$

④ $-x-3$

⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
 $f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하자.

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b\end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$ 를 대입하면

$$f(1) = a + b = 2, \quad f(2) = 2a + b = 1$$

두 식을 연립하여 구하면 $a = -1, b = 3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

9. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 가 $(x-1)(x+2)$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하십시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$$

$$\therefore -a + b = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$$

$$\therefore 2a + b = -5 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $a = -2$, $b = -1$

10. $x^2 + y^2 + 2xy - x - y$ 을 인수분해 하면?

① $(x - y)(x + y + 1)$

② $(x + y)(x - y - 1)$

③ $(x - y)(x - y - 1)$

④ $(x + y)(x + y - 1)$

⑤ $(x + y)(x + y + 1)$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 2xy - x - y \\ &= (x + y)^2 - (x + y) = (x + y)(x + y - 1) \end{aligned}$$

11. $x^3 - 4x^2 + x + 6$ 을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 이다. $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ 이라 놓으면,

$x = -1$ 일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$

따라서, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 로 나누어 떨어진다.

즉, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 의 인수를 갖는다.

즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$ 몫

$Q(x)$ 는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x + 1)$$

$$\therefore f(x) = (x - 3)(x - 2)(x + 1)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$$

12. 두 다항식 $2x^2 + 2x - 4$ 와 $4x^3 - 4$ 에 관한 설명이다. 옳지 않은 것을 고르면?

- ① 두 다항식은 $(x - 1)$ 로 나누어 떨어지므로, $(x - 1)$ 은 두 다항식의 공약수이다.
- ② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.
- ③ $4(x - 1)^3(x + 2)^2(x^2 + x + 1)$ 은 두 다항식의 공배수이다.
- ④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x - 1)$ 이다.
- ⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x + 2)(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$ 이다.

해설

$$2x^2 + 2x - 4 = 2(x - 1)(x + 2)$$

$$4x^3 - 4 = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{최대공약수 : } 2(x - 1)$$

$$\text{최소공배수 : } 4(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)$$

13. $2|x-1| + x - 4 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x < 1$ 일 때,

$$-2(x-1) + (x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2$$

ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$2(x-1) + x - 4 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 구하는 해는 $x = -2$ 또는 $x = 2$ 이다.

14. $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근이 α, β 이다. $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 2$ 일 때 $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p = 3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q = 2$ 이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$

15. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

16. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x + y + z = 1 \text{ 에서}$$

$$x + y = 1 - z$$

$$y + z = 1 - x$$

$$z + x = 1 - y$$

$$(x + y)(y + z)(z + x) = (1 - z)(1 - x)(1 - y)$$

$$= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz$$

$$= 1 - 1 + 2 - 3 = -1$$

17. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= 4\{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)\} \end{aligned}$$

$$= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

19. 복소수 $z = (1 + i)x + 1 - 2i$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$$z = (1 + i)x + 1 - 2i = (x + 1) + (x - 2)i$$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow z$ 가 순허수

$$\therefore x + 1 = 0, \quad x = -1$$

20. 지상 40m 높이에서 $v\text{m/s}$ 의 속도로 똑바로 위로 쏘아올린 공이 t 초 후에 지면으로부터 $h\text{m}$ 만큼의 높이가 될 때, $h = vt + 40 - 5t^2$ 의 식이 성립한다. 공이 3 초 후에 최고 높이에 도달했을 때, 이 최고 높이를 구하여라.

▶ 답: m

▷ 정답: 85 m

해설

$$h = -5t^2 + vt + 40 = -5\left(t - \frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v^2}{20} + 40$$

이 물체는 $t = \frac{v}{10}$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v^2}{20} + 40$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} = 3$

이므로 $v = 30$ 이다.

따라서 최고 높이는 85m 이다.

21. x^2 의 계수가 1인 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 합이 $2x^2 + 5x - 3$ 이고
최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 이다. $f(0) = 3$, $g(0) = -6$ 일 때,
 $f(2) + g(-1)$ 의 값은?

① 9

② 11

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$f(x) + g(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$f(x) = Ga, g(x) = Gb \quad (a, b \text{는 서로소})$$

$$G(a+b) = (2x-1)(x+3)$$

$$\text{최소공배수 } Gab = (x+3)(x-2)(x+1)$$

$$f(x) = (x+3)(x+1) \quad (\Leftarrow f(0) = 3)$$

$$g(x) = (x+3)(x-2) \quad (\Leftarrow g(0) = -6)$$

$$\therefore f(2) + g(-1) = 15 + (-6) = 9$$

22. 양의 실수 a, b 에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i 는 허수단위)의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3 + i$

② $2 + 3i$

③ $5 - 2i$

④ $1 - 3i$

⑤ $-4 - 2i$

해설

$$z = (a+b) + (a-b)i \in A \quad (a > 0, b > 0)$$

① $a+b = -3, a-b = 1$

$$\therefore a = -1, b = -2 \text{ (부적당)}$$

② $a+b = 2, a-b = 3$

$$\therefore a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2} \text{ (부적당)}$$

③ $a+b = 5, a-b = -2$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{7}{2} \text{ (양의 실수)}$$

④ $a+b = 1, a-b = -3$

$$\therefore a = -1, b = 2 \text{ (부적당)}$$

⑤ $a+b = -4, a-b = -2$

$$\therefore a = -3, b = -1 \text{ (부적당)}$$

23. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{15} = 1$

㉢ $z = \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1}$ 일 때, $z\bar{z} = \frac{7}{3}$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ : $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ : $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$, $\alpha^3 = 1$

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{15}$

$= 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3(1 + \alpha + \alpha^2) + \cdots + \alpha^{15} = \alpha^{15}$

$= (\alpha^3)^5 = 1$ ($\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$)

㉢ : $\bar{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$, $\alpha + \bar{\alpha} = -1$, $\alpha\bar{\alpha} = 1$

$z = \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1}$, $\bar{z} = \frac{\bar{\alpha} + 3}{2\bar{\alpha} + 1}$

$z\bar{z} = \frac{\alpha\bar{\alpha} + 3(\alpha + \bar{\alpha}) + 9}{4\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 1} = \frac{1 - 3 + 9}{4 - 2 + 1} = \frac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha + 1 = \sqrt{3}i, \alpha + 3 = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1} = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$
 $= -\frac{5i - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z \cdot \bar{z} = \frac{\sqrt{3} - 5i}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} + 5i}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{3}$

24. 이차방정식 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 이차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(\alpha) = 3, f(\beta) = 3, f(1) = -2$ 를 만족한다. 이차방정식 $f(x) = 0$ 를 구하면?

① $x^2 - 2x - 4 = 0$

② $x^2 - 4x - 1 = 0$

③ $x^2 - x - 4 = 0$

④ $x^2 - x + 4 = 0$

⑤ $x^2 - 2x - 1 = 0$

해설

$x^2 - 2x - 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이고

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

$ax^2 + bx + c = 3$ 에서 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$

$$\therefore -\frac{b}{a} = \alpha + \beta = 2$$

$$\text{또, } \frac{c-3}{a} = \alpha\beta = -4$$

$f(1) = a + b + c = -2$ 이므로

$a = -b - c - 2, b = -2a$ 에서

$$b = -2(-b - c - 2) = 2b + 2c + 4$$

$$\therefore b + 2c + 4 = 0$$

$c - 3 = -4a$ 에서

$$c = -4(-b - c - 2) + 3 = 4b + 4c + 11$$

연립하여 풀면 $c = -1, b = -2, a = 1$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x - 1$$

25. 밑변의 길이와 높이의 합이 28 cm 인 삼각형의 최대 넓이는?

① 90 cm^2

② 92 cm^2

③ 94 cm^2

④ 96 cm^2

⑤ 98 cm^2

해설

삼각형의 밑변의 길이를 $x \text{ cm}$, 높이를 $y \text{ cm}$ 라 하면

$$y = \frac{1}{2}x(28 - x)$$

$$= \frac{1}{2}(-x^2 + 28x)$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 28x)$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 14)^2 + 98$$