1. $\triangle$ABC의 세 꼭짓점이 $\mathrm{A}(-2,3)$, $B(-1,4)$, $C(9,8)$일 때, 무게 중심의 좌표를 구하면?

① (2, 5)　② (2, 6)　③ (3, 5)　④ (3, 6)　⑤ (4, 5)

해설

$$\mathrm{G} = \left(\frac{-2-1+9}{3},\ \frac{3+4+8}{3}\right) = (2,\ 5)$$

2. 두 점 $(2,\ 1)$, $(3,\ 4)$ 를 지나는 직선에 평행하고, x 절편이 2 인 직선의 방정식은?

① $y = 3x - 6$ ② $y = 3x - 2$ ③ $y = 3x - 1$

④ $y = 3x + 6$ ⑤ $y = 3x + 2$

해설

두 점 $(2,\ 1)$, $(3,\ 4)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{4-1}{3-2} = 3$ 이므로, 구하는 직선의 기울기는 3 이고, x 절편이 2 인 직선이므로,

$y = 3(x-2)$

$\therefore\ \ y = 3x - 6$

3. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는 5이고 점 $\mathrm{C}(a+b)$의 좌표를 -1이라 할 때, 점 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$a > b$일때, $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리는 $a-b$이므로, $a-b=5$
따라서 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는 5

4. 함수 $f(x) = ax + 1$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하면?

① $(1, 0)$ ② $(1, 1)$ ③ $(0, 1)$

④ $(-1, 0)$ ⑤ $(0, -1)$

해설

함수 $f(x) = ax + 1$ 의 그래프는
a 의 값에 관계없이 점$(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이다.

5. 원 $x^2+y^2-4x+6y-1=0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r 라 하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2+(2+3)^2=r^2$
$\therefore r^2=26$

6. 두 직선 $x-3y+1=0$, $x+y-3=0$ 의 교점과 직선 $4x+3y-1=0$ 사이의 거리는?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x-3y+1=0$, $x+y-3=0$의 교점은 $(2,1)$

$\therefore$ $4x+3y-1=0$ 까지의 거리 :

$$\frac{|4\times2+3\times1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

7. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$ ② $2x+3y+1=0$

③ $4x-3y+1=0$ ④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를 $\mathrm{P}(X,\ Y)$라 하면,

$$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\frac{x-2}{2},\ \frac{y+3}{2}\right)$$ 이므로

$$X=\frac{x-2}{2},\ Y=\frac{y+3}{2}$$

$\therefore\ x=2X+2,\ y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

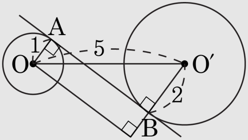
$\therefore\ 4x+2y-3=0$

8. 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원 O, O′의 중심거리가 5일 때, 두 원의 공통내접선의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

주어진 두 원의 그래프를 다음 그림과 같이 나타내면 $\overline{AB}$가 공통내접선이 된다.



점 O에서 선분 O′B의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AO} = \overline{BH} = 1$

$\therefore \overline{O'H} = 1 + 2 = 3$

이때, 두 원의 중심거리가 5이므로

$\triangle OHO'$에서 피타고라스의 정리에 의하여

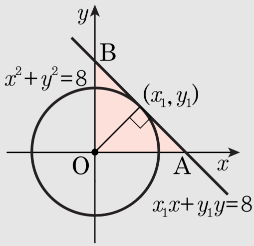
$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

9. 원 $x^2+y^2=8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=8\cdots\cdots$ ㉠ (단, $x_1>0, y_1>0$)

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선 ㉠과 x 축, y 축의 교점이므로

$\mathrm{A}\left(\dfrac{8}{x_1}, 0\right), \mathrm{B}\left(0, \dfrac{8}{y_1}\right)$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x_1}\cdot\frac{8}{y_1}=\frac{32}{x_1y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=8$ 이고

$x_1>0, y_1>0$ 에서

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\geq\sqrt{x_1^2\cdot y_1^2}=x_1y_1,\ x_1y_1\leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1}\geq\frac{1}{4}\leftarrow\frac{x_1^2+y_1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$\therefore \mathrm{S}=\frac{32}{x_1y_1}\geq 32\cdot\frac{1}{4}=8$$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.

10. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에 대하여 $\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 의 최댓값은?

① 4　　② 5　　③ 6

④ $1+\sqrt{5}$　　⑤ $2(1+\sqrt{5})$

해설

$\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 은 두 점 $(a,\ b)$, $(3, 4)$ 사이의 거리이고 점 $(a,\ b)$ 는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로 $\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 의 값이 최대인 경우는 점 P 의 위치가 그림과 같을 때이다. 원의 중심 $(0, 0)$ 과 $(3, 4)$ 의 거리는 5 이므로 최댓값은 $5 + 1 = 6$