

1. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서

$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로

$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x$

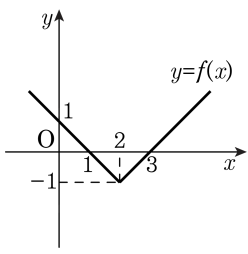
$f(3x + 1) = x$

$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고

$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$

$\therefore f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

2. 함수 $f(x) = |x - 2| - 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

- ㉠ $f(0) = 0$
- ㉡ $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
- ㉢ $f(x) < 0$ 이면 $1 < x < 3$
- ㉤ $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉤

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

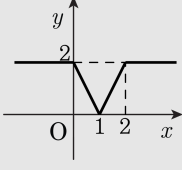
- ㉠ $f(0) = 1$
 - ㉡ $f(1) = 0, f(3) = 0$ 이므로
 $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
 - ㉢ $f(x) < 0$ 이면 그래프가
 x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1 < x < 3$
 - ㉤ $x < 2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
 $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$
- 따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

3. 함수 $y = ||x| - |x - 2||$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M + m$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = ||x| - |x - 2||$ 에서
(i) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$, $|x - 2| = -(x - 2)$ 이므로 $y = |-x + x - 2| = 2$
(ii) $0 \leq x < 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x - 2| = -(x - 2)$ 이므로 $y = |x + x - 2| = 2|x - 1|$
(iii) $x \geq 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x - 2| = x - 2$ 이므로 $y = |x - x + 2| = 2$
(i), (ii), (iii)로부터 $y = ||x| - |x - 2||$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 최댓값은 2 , 최솟값은 0 이므로 $M = 2$, $m = 0$ $\therefore M + m = 2$

4. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 5$, $f(f(x)) = x$ 일 때 $f(3)$ 의 값은?

① -5

② -3

③ $\frac{1}{3}$

④ 3

⑤ 5

해설

$f(f(x)) = x$ 이므로 $f(x) = f^{-1}(x)$
 $\therefore f(3) = f^{-1}(3) = 5$

5. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = (g^{-1} \circ f \circ g)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x+3$ ⑤ $x+4$

해설

$$\begin{aligned} h &= g^{-1} \circ f \circ g \text{ 에서} \\ h \circ h &= (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g) \\ (h \circ h)(x) &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ &= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ &= g^{-1}((f \circ f)(g(x))) \\ (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x \text{ 이므로 } (h \circ h)(x) = \\ &= g^{-1}(g(x)) = x \end{aligned}$$

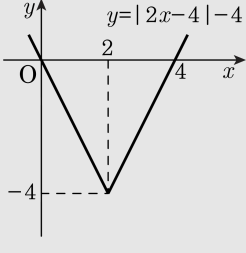
6. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |2x - 4| - 4 = |2(x - 2)| - 4$ 의 그래프는
 $y = |2x|$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한
것이므로
다음 그림과 같다.



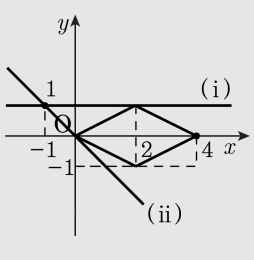
따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

7. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
 이다.
 이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $x+2y=2$ 의 그래프에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을
 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한
 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼
 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 다음 그림과 같다.
 직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이
 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면
 (i) $m \leq 0$
 (ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
 $0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$
 (i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$
 따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.



8. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P를 잡아 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P의 좌표를 구하면?
- ① P(-2) ② P(-1) ③ P(0)
- ④ P(1) ⑤ P(2)

해설

점 P의 좌표를 $P(x)$ 라 하면
 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$
 $y = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$ 의
그래프의 개형은
다음 그림과 같으므로 $x = 1$ 에서 최
솟값을 가진다.
따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(1)
이다.

9. $f(5) = 10$, $f(10) = 30$ 이고 $g(x) = ax - 10$ 인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1} \circ g = f$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 8$

해설

$f \circ (f^{-1} \circ g) = f \circ f$ 에서

$g = f \circ f \cdots \textcircled{1}$

$g(5) = f(f(5)) = f(10) = 30 \cdots \textcircled{2}$

$\therefore 5a - 10 = 30$

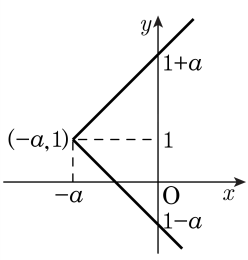
따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.

10. $|y-1|=x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$|y-1|=x+a$ 의
그래프는 $|y|=x$ 를
 x 축 음의 방향으로 a ,
 y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨
그래프이므로 다음 그림과 같다.
이때, y 절편은 $|y-1|=a$ 에서 $y=1\pm a$
 $\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 4 \quad \therefore a = 2(a > 0)$



11. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$, $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 충분조건일 때, a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \leq a \leq 1$
 ④ $-1 \leq a \leq 1$ ⑤ $-2 \leq a \leq 2$

해설

두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$,
 $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여
 q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
 각각의 진리집합을 P, Q 라 하면 $Q \subset P$
 이다.

$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
 반지름의 길이가 2인 원이고,

$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는

$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를

y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

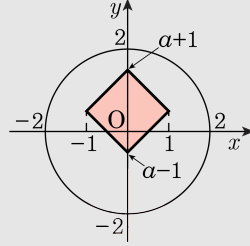
이 때 $P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

$Q = \{(x, y) \mid |x| + |y - a| \leq 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.

따라서 $Q \subset P$ 이라면 다음 그림에서

$a + 1 \leq 2, a - 1 \geq -2$

$\therefore -1 \leq a \leq 1$



12. 함수 $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 에서

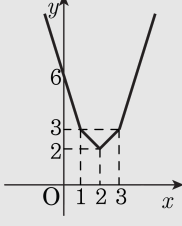
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 + x - 3 = 3x - 6$

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 - (x - 3) = x$

(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x - 1 - (x - 2) - (x - 3) = -x + 4$

(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x - 1) - (x - 2) - (x - 3) = -3x + 6$

따라서 $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2, n = 2$

$\therefore mn = 4$

13. 함수 $y = |x - 1| - |x - 2|$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만날 때, 상수 k 의 값이 될 수 없는 것은?

- ㉠ $\frac{1}{2}$ ㉡ $\frac{1}{3}$ ㉢ $\frac{1}{4}$ ㉣ $\frac{1}{5}$ ㉤ $\frac{1}{6}$

해설

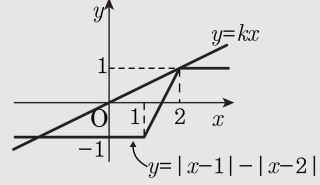
$$y = |x - 1| - |x - 2|$$

$$(i) \ x \geq 2 \text{ 일 때, } y = x - 1 - (x - 2) = 1$$

$$(ii) \ 1 \leq x < 2 \text{ 일 때, } y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$$

$$(iii) \ x < 1 \text{ 일 때, } y = -(x - 1) + (x - 2) = -1$$

$y = |x - 1| - |x - 2|$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$y = kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $y = kx$ 의 그래프가 점 $(2, 1)$ 을 지날 때

$$1 = 2k \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

따라서 두 그래프가 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는

$$0 < k < \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

그러므로 보기 중 위 범위에 속하지 않는 것은 ㉠이다.

14. 두 함수 f 와 g 는 서로 역함수 관계이고 양의 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = \frac{1}{2}f(x)f(y)$ 가 성립할 때, 다음 중 $g(xy)$ 를 $g(x), g(y)$ 로 나타내면? (단, $f(1) = 4$)

① $g(xy) = g(x) + g(y)$

② $g(xy) = g(x) + g(y) + 1$

③ $g(xy) = g(x)g(y)$

④ $g(xy) = g(x)g(y) + 1$

⑤ $g(xy) = 2g(x)g(y)$

해설

$g(x) = a, g(y) = b$ 라 하면 f 가 g 의 역함수이므로 $x = f(a), y = f(b)$

$$xy = f(a)f(b) = 2f(a+b)$$

$$\therefore \frac{xy}{2} = f(a+b)$$

$$\therefore g\left(\frac{xy}{2}\right) = a+b = g(x) + g(y)$$

$$\text{그런데 } g(xy) = g(x) + g(2y) = g(x) + g(y) + g(4)$$

$$f(1) = 4 \text{ 이므로 } g(4) = 1$$

$$\therefore g(xy) = g(x) + g(y) + 1$$

15. $|y-x|+|y+x|=2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 ?

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

절댓값의 정의에 의하여

(i) $y-x \geq 0, y+x \geq 0$ 일 때,

$$y-x+y+x=2$$

$$\therefore y=1$$

(ii) $y-x \geq 0, y+x < 0$ 일 때,

$$y-x-y-x=2$$

$$\therefore x=-1$$

(iii) $y-x < 0, y+x \geq 0$ 일 때, $-y+x+y+x=2$

$$\therefore x=1$$

(iv) $y-x < 0, y+x < 0$ 일 때, $-y+x-y-x=2$

$$\therefore y=-1$$

$$\therefore S=2 \times 2=4$$

