1. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

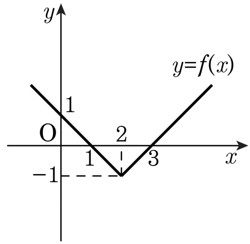
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서
$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로
$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow \ f(g(x)) = x$
$f(3x + 1) = x$
$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고
$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$
$\therefore \ f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

2. 함수 $f(x) = |x-2|-1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(0) = 0$
㉡ $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
㉢ $f(x) < 0$ 이면 $1 < x < 3$
㉣ $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $f(0) = 1$
㉡ $f(1) = 0,\ f(3) = 0$ 이므로
$f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
㉢ $f(x) < 0$ 이면 그래프가
x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1 < x < 3$
㉣ $x < 2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
$a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉣이다.

3. 함수 $y = ||x| - |x-2||$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M+m$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

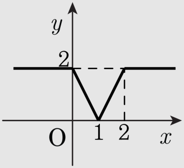
$y = ||x| - |x-2||$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = |-x+x-2| = 2$

(ii) $0 \le x < 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = |x+x-2| = 2|x-1|$

(iii) $x \ge 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x-2| = x-2$ 이므로 $y = |x-x+2| = 2$

(i), (ii), (iii) 로부터 $y = ||x| - |x-2||$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 최댓값은 2 , 최솟값은 0 이므로 $M = 2$, $m = 0$ $\therefore M+m = 2$

4. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3)=5$, $f(f(x))=x$ 일 때 $f(3)$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(f(x))=x$ 이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$

$\therefore f(3)=f^{-1}(3)=5$

5. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = \left(g^{-1} \circ f \circ g\right)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x+3$ ⑤ $x+4$

해설

$h = g^{-1} \circ f \circ g$ 에서

$$\begin{aligned} h \circ h &= (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ h)(x) &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ &= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ &= g^{-1}((f \circ f)(g(x)) \end{aligned}$$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x$ 이므로 $(h \circ h)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$

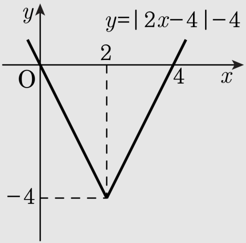
6. 함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=|2x-4|-4=|2(x-2)|-4$ 의 그래프는
$y=|2x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로
다음 그림과 같다.

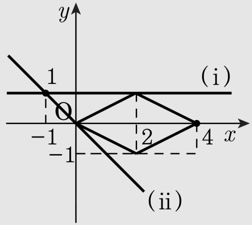


따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$

7. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



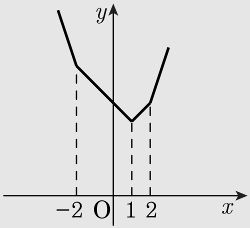
함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
이다.
이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
$x+2y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한
것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼
평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
다음 그림과 같다.
직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이
점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면
(i) $m \leq 0$
(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$
(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

8. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P 를 잡아 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P 의 좌표를 구하면?

① P(-2) ② P(-1) ③ P(0)
④ P(1) ⑤ P(2)

해설

점 P 의 좌표를 P(x) 라 하면
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=|x+2|+|x-1|+|x-2|$
$y=|x+2|+|x-1|+|x-2|$ 의
그래프의 개형은
다음 그림과 같으므로 $x=1$ 에서 최솟값을 가진다.
따라서 구하는 점 P 의 좌표는 P(1) 이다.



9. $f(5)=10$, $f(10)=30$ 이고 $g(x)=ax-10$ 인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1}\circ g=f$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=8$

해설

$f\circ(f^{-1}\circ g)=f\circ f$ 에서

$g=f\circ f\cdots$ ㉠

$g(5)=f(f(5))=f(10)=30\cdots$ ㉡

$\therefore\ 5a-10=30$

따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.

10. $|y-1|=x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

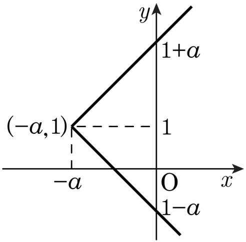
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$|y-1|=x+a$ 의 그래프는 $|y|=x$를 x 축 음의 방향으로 a, y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 그래프이므로 다음 그림과 같다.

이때, y 절편은 $|y-1|=a$ 에서 $y=1\pm a$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=4$　　$\therefore\ a=2(a>0)$

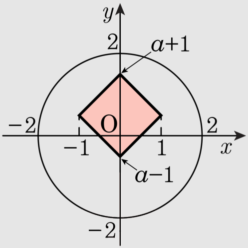


11. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$, $q : |x| + |y - a| \le 1$에 대하여 q는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \le a \le 1$

④ $-1 \le a \le 1$ ⑤ $-2 \le a \le 2$

해설



두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$,
$q : |x| + |y - a| \le 1$ 에 대하여
q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
각각의 진리집합을 P, Q라 하면 $Q \subset P$
이다.
$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
반지름의 길이가 2인 원이고,
$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는
$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
이 때 $P = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
$Q = \{(x,\ y) \mid |x| + |y - a| \le 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.
따라서 $Q \subset P$이려면 다음 그림에서
$a + 1 \le 2$, $a - 1 \ge -2$
$\therefore -1 \le a \le 1$

12. 함수 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 에서

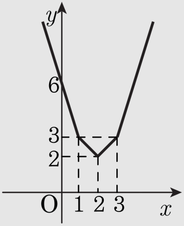
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x-1+x-2+x-3 = 3x-6$

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x-1+x-2-(x-3) = x$

(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x-1-(x-2)-(x-3) = -x+4$

(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1)-(x-2)-(x-3) = -3x+6$

따라서 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2,\ n = 2$

$\therefore mn = 4$

13. 함수 $y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만날 때, 상수 k 의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

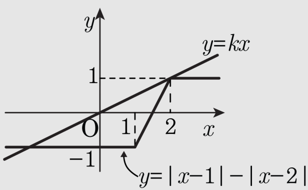
$y = |x-1| - |x-2|$

(i) $x \geq 2$ 일 때, $y = x-1-(x-2) = 1$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x-1+x-2 = 2x-3$

(iii) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1)+(x-2) = -1$

$y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$y = kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $y = kx$ 의 그래프가 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때

$1 = 2k \quad \therefore k = \frac{1}{2}$

따라서 두 그래프가 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는

$0 < k < \frac{1}{2}$ 이다.

그러므로 보기 중 위 범위에 속하지 않는 것은 ① 이다.

14. 두 함수 f 와 g 는 서로 역함수 관계이고 양의 실수 x , y 에 대하여 $f(x+y)=\frac{1}{2}f(x)f(y)$ 가 성립할 때, 다음 중 $g(xy)$ 를 $g(x)$, $g(y)$ 로 나타내면? (단, $f(1)=4$)

① $g(xy)=g(x)+g(y)$

② $g(xy)=g(x)+g(y)+1$

③ $g(xy)=g(x)g(y)$

④ $g(xy)=g(x)g(y)+1$

⑤ $g(xy)=2g(x)g(y)$

해설

$g(x)=a$, $g(y)=b$ 라 하면 f 가 g 의 역함수이므로 $x=f(a)$, $y=f(b)$

$xy=f(a)f(b)=2f(a+b)$

$\therefore\ \frac{xy}{2}=f(a+b)$

$\therefore\ g\left(\frac{xy}{2}\right)=a+b=g(x)+g(y)$

그런데 $g(xy)=g(x)+g(2y)=g(x)+g(y)+g(4)$

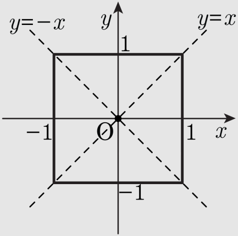
$f(1)=4$ 이므로 $g(4)=1$

$\therefore\ g(xy)=g(x)+g(y)+1$

15. $|y-x|+|y+x|=2$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설



절댓값의 정의에 의하여

(i) $y-x \geq 0,\ y+x \geq 0$ 일 때,

$y-x+y+x=2$

$\therefore\ y=1$

(ii) $y-x \geq 0,\ y+x < 0$ 일 때,

$y-x-y-x=2$

$\therefore\ x=-1$

(iii) $y-x<0,\ y+x \geq 0$ 일 때, $-y+x+y+x=2$

$\therefore\ x=1$

(iv) $y-x<0,\ y+x<0$ 일 때, $-y+x-y-x=2$

$\therefore\ y=-1$

$\therefore\ S=2\times 2=4$