1. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 위의 한 점 $(4,2)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $4x+3y-10=0$　② $3x+4y-10=0$

③ $4x+3y-20=0$　④ $3x+4y-20=0$

⑤ $4x+2y-25=0$

해설

공식에 대입하면
$(x_1-1)(x-1)+(y_1+2)(y+2)=25$ 에서
$x_1=4, y_1=2$ 이므로 $3x+4y-20=0$

2. 직선 $y = 2x$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = x + 1$ 또는 $y = 2x - 11$

② $y = 2x + 2$ 또는 $y = 4x - 4$

③ $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

④ $y = 3x + 6$ 또는 $y = 7x - 19$

⑤ $y = 6x + 3$ 또는 $y = 3x - 5$

해설

구하는 접선이 직선 $y = 2x$ 에 평행하므로
$y = 2x + b \cdots\cdots$ ㉠ 로 놓을 수 있다.
이 때, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에서
$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$ 이므로
중심이 $(1, -3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{20}$ 인 원이다.
따라서, 원의 중심 $(1, -3)$ 에서 직선 $y = 2x + b$,
즉 $2x - y + b = 0$ 까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2 + 3 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20}$$

$|b + 5| = 10, b + 5 = \pm 10$
$\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

해설

㉠을 원의 방정식에 대입하면
$x^2 + (2x + b)^2 - 2x + 6(2x + b) - 10 = 0$
$5x^2 + 2(5 + 2b)x + b^2 + 6b - 10 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (5 + 2b)^2 - 5\left(b^2 + 6b - 10\right) = 0$$

$b^2 + 10b - 75 = 0, (b - 5)(b + 15) = 0$
$\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$ 이것을 ㉠에 대입하면
구하는 접선의 방정식은
$y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

3. 다음 중에서 점 $(2, 4)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x = 2$　　㉡ $y = 4$

㉢ $3x + 4y + 10 = 0$　　㉣ $3x - 4y + 10 = 0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉢, ㉣

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 으로 놓으면
접선의 방정식은
$x_1x + y_1y = 4 \cdots\cdots$㉠
㉠이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로
$2x_1 + 4y_1 = 4,\ x_1 + 2y_1 = 2 \cdots\cdots$㉡
또, 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로
$x_1^2 + y_1^2 = 4 \cdots\cdots$㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$x_1 = 2, y_1 = 0$ 또는 $x_1 = -\frac{6}{5}, y_1 = \frac{8}{5}$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$x = 2$ 또는 $3x - 4y + 10 = 0$

4. 점 $(3,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선을 $y=mx+n$ 이라 할 때, mn의 값은?

① -4 ② -6 ③ -8 ④ -10 ⑤ -12

해설

점 $(3,\ 1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면, $y=m(x-3)+1$
이 직선은 원에 접하므로 원의 중심과의 거리가 반지름과 같다.

$\dfrac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$에서

$2m^2-3m-2=0$

$m=-\dfrac{1}{2},\ 2$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=2x-5$ $(\because m>0)$

$\therefore\ mn=-10$

5. 점 $(0,\ 4)$를 지나고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=\pm\sqrt{11}x+4$　② $y=\pm\sqrt{13}x+4$

③ $y=\pm\sqrt{14}x+4$　④ $y=\pm\sqrt{15}x+4$

⑤ $y=\pm\sqrt{17}x+4$

해설

접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(0,4)$를 지나는 접선의 방정식은 $y-4=mx$ 즉, $mx-y+4=0$
원의 중심 $(0,0)$로부터 이 직선까지의 거리가 반지름 1과 같아야 하므로

$$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}=1, 4=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 풀면 $m^2=15$
$\therefore m=\pm\sqrt{15}$
따라서 $y=\pm\sqrt{15}x+4$

6. 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ 위의 점 C에서 두 점 A$(6,\ -4)$, B$(10,\ 0)$ 을 지나는 직선 l에 이르는 거리의 최댓값은?

① $5+4\sqrt{2}$ ② $5+\frac{9}{2}\sqrt{2}$ ③ $10+\sqrt{2}$

④ 11 ⑤ 12

해설

직선 AB의 방정식은

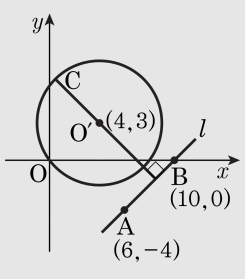
기울기가 $m=\frac{-4-0}{6-10}=1$ 이므로

$y=x-10$ 즉, $x-y-10=0$ 이고

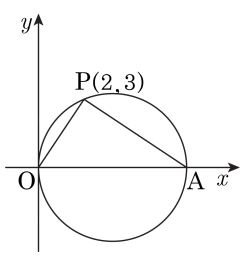
원의 중심 $(4,\ 3)$에서 직선 AB에 이르는 거리는

$\frac{|4-3-10|}{\sqrt{1+1}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$ 이므로 원 위의 점 C에서

직선 l에 이르는 거리의 최댓값은 $\frac{9\sqrt{2}}{2}+5$ 이다.



7. 다음 그림과 같이 선분 OA 를 지름으로 하는 원 위에 한 점 P(2, 3) 이 있다. 이 때, 점 A 의 x 좌표를 구하면?



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

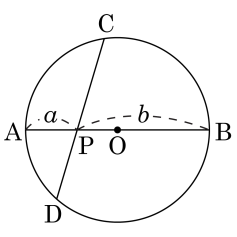
해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면
삼각형 OAP 가 직각삼각형이므로,
$a^2 = (2^2 + 3^2) + (a-2)^2 + 3^2$
$a^2 = a^2 - 4a + 26$
따라서 $a = \frac{13}{2}$

해설

반원의 원주각은 $90°$ 이므로 $\angle OPA = 90°$
따라서, 직선 OP 와 직선 AP 의 기울기의 곱은 -1 이다.
점 A 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면
$\frac{3-0}{2-a} \times \frac{3}{2} = -1,\ 2a - 4 = 9$
따라서 $a = \frac{13}{2}$
A 의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이다.

8. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P 를 지나 $\overline{PC}$의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD 를 긋는다. $\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$ 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 a, b 를 써서 나타내면?



① $\frac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$

④ ab ⑤ $\frac{2ab}{a+b}$

해설

$\overline{CP} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a+b}{2}$ 이고

$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$ 이므로

$ab = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{DP}$

$\therefore \overline{DP} = \frac{2ab}{a+b}$

9. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

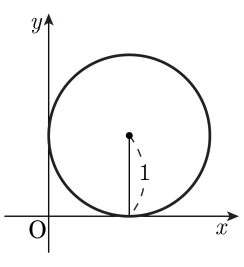
$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

10. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\dfrac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$\dfrac{y+2}{x+1} = k$라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은
k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$를 지난다.
이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

11. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x|\cdots$㉠

$x^2+y^2=2|x+y|\cdots$㉡

㉠과 ㉡에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x\cdots$㉢

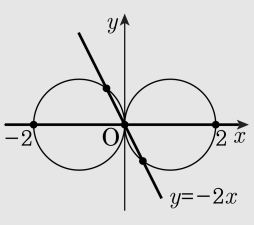
㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.

실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0),\ (\pm 2,\ 0),$

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)



12. 원 $x^2+y^2=5$ 와 점 $\mathrm{P}\,(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle \mathrm{OAB}$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$x_1 y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\dfrac{25}{2x_1 y_1}$ 이므로

$x_1 y_1$ 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2 + y_1^2 = 5$ 이고 $x_1 > 0, y_1 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1,\ x_1 y_1 \leq \dfrac{5}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{x_1 y_1} \geq \dfrac{2}{5}$

$\therefore \dfrac{25}{2x_1 y_1} \geq \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = 5$ (단, 등호는 $x_1 = y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

13. 반지름의 길이가 10, 중심좌표가 O(0, 0)인 원 밖의 한 점 P(11, 12)에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선을 극선이라고 한다. 이 극선의 방정식이 $px+qy=100$일 때, $p+q$를 구하여라.

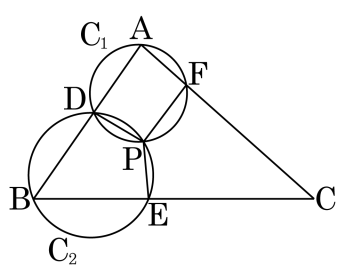
▶ 답:

▷ 정답: 23

해설

원 위의 두 접점을 $Q_1(a_1, b_1)$, $Q_2(a_2, b_2)$라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x+b_1y=100$, $a_2x+b_2y=100$이고
두 직선은 동시에 P(11, 12)를 지나므로
$11a_1+12b_1=100$, $11a_2+12b_2=100$이 함께 성립한다.
이것은 $11x+12y=100$ 위에 두 점 $Q_1(a_1, b_1)$,
$Q_2(a_2, b_2)$가 동시에 있는 것을 의미하므로
직선 Q_1, Q_2의 방정식은
$11x+12y=100$이다.
따라서 $p=11$, $q=12$ $\therefore$ $p+q=23$

14. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.
$\angle DPF+$ [가] $= 180°$
$\angle DPE+$ [나] $= 180°$
$\angle DPF + \angle DPE = 360° - ($[가] $+$ [나]$)$ 에서
$\angle FPE =$[가]$+$[나]
$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$
따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할 때, [다]

(가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

② (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

③ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

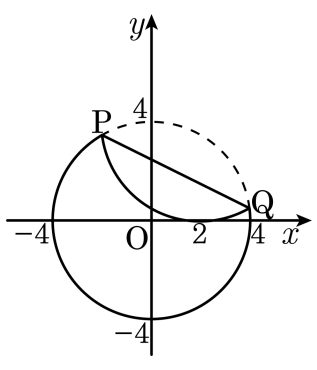
④ (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

⑤ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

$\square ADPF$ 에서 $\angle DPF + \angle A = 180°$
$\square BEPD$ 에서 $\angle DPE + \angle B = 180°$
따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360° - (\angle A + \angle B)$
$\angle FPE = \angle A + \angle B$
$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$
따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C3 라 할 때,
세 원 C1, C2, C3는 한 점 P 에서 만난다.

15. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$을 점 $(2,0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

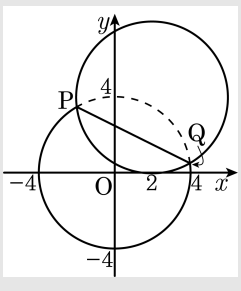


▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2,0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$//



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.

16. a 는 실수이고 원 $x^2-2ax+y^2-4ay+5a^2-1=0$ 의 중심과 점 $(-3,\ 1)$ 과의 거리를 $f(a)$ 라고 할 때, $f(a)$ 의 최솟값은?

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ 3

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면

$(x-a)^2+(y-2|a|)^2=1$

$\therefore$ 중심 $(a,\ 2|a|)$

$\therefore\ f(a)=\sqrt{(a+3)^2+(2|a|-1)^2}$

$=\sqrt{5a^2+6a-4|a|+10}$

(i) $a\geq 0$ 일 때

$f(a)=\sqrt{5a^2+2a+10}$

$=\sqrt{5\left(a+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}\geq\sqrt{10}$

(ii) $a<0$ 일 때

$f(a)=\sqrt{5a^2+10a+10}$

$=\sqrt{5(a+1)^2+5}\geq\sqrt{5}$

따라서 $f(a)$ 의 최솟값은 $\sqrt{5}$

17. 두 원 $x^2+y^2=1,\ x^2+(y-2)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y=ax+b$ 까지의
거리가 반지름과 같으면 되므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \Longleftrightarrow b^2=a^2+1 \cdots ①$$

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \Longleftrightarrow (b-2)^2=4(a^2+1) \cdots ②$$

①, ② 에서 $b^2 \geq 1$ 임을 유의하면

$b=-2,\ a^2=3$

따라서 $a^2+b^2=7$

해설

중심 $C_1(0\ ,0)$ 과 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는 $\frac{|a\cdot 0-1\cdot 0+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}$

반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1\ ,\ |b|=\sqrt{a^2+1}$

$\therefore\ b^2=a^2+1 \cdots\cdots ①$

중심 $C_2\ (0,2)$ 와 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는

$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1=2}}\ ,\ |b-2|=2\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^2-4b=4a^2 \quad \cdots\cdots ㉡$

$㉠\times 4-㉡$ 에서

$3b^2+4b-4=0\ ,\ (3b-2)(b+2)=0$

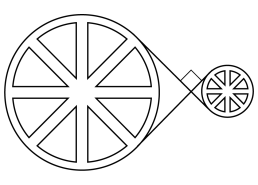
$\therefore\ b=\frac{2}{3},\ -2$

이 때 $b^2=a^2+1\geq 1$ 에서 $b=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=3$

$\therefore a^2+b^2=3+4=7$

18. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a+b\pi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

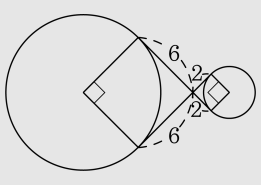


▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서 $6+2=8$ 이다.



∴ 벨트의 길이는

$$2\times 8+\pi\times 2\times 6\times\frac{270}{360}+\pi\times 2\times 2\times\frac{270}{360}$$

$$=16+12\pi$$

∴ $a+b=28$

19. 원 O : $x^2+y^2=1$, O′ : $(x-4)^2+y^2=4$ 와 직선 l : $\sqrt{3}x-y+4=0$, 점 A$(2,\sqrt{5})$ 에 대하여 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 원 O 위의 한 점에서 직선 l 에 이르는 거리의 최솟값은 1 이다.

㉡ 점 A 와 원 O′ 위의 한 점 까지의 거리의 최댓값은 5 이다.

㉢ 두 원 O 와 O′ 의 공통외접선의 길이를 α, 공통내접선의 길이를 β 라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값은 22 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. 최솟값은 원 중심에서 l 까지 거리에서 원 반지름을 뺀 값과 같다

$\Rightarrow \dfrac{|4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}-1=1$ (참)

㉡. 최댓값은 $\overline{O'A}$ 길이에 반지름을 합한 값과 같다.

$\Rightarrow \sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}+2=5$ (참)

㉢. 내접선 : $B=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

외접선 : $A=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

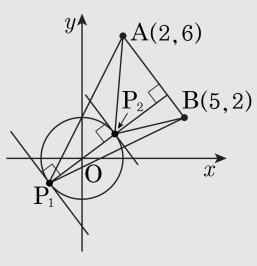
$\therefore\ A^2+B^2=22$ (참)

20. 두 점 A(2, 6), B(5, 2) 가 있다. 점 $P(x, y)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위를 움직일 때, $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 한다. $M + m$ 의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

해설

$\triangle ABP$ 의 넓이는 다음 그림과 같이 P 가 I 일 때 최댓값, II 일 때 최솟값을 가진다.



$\overline{AB}$ 의 방정식이 $y = \dfrac{2-6}{5-2}(x-2)+6$

$\Rightarrow \quad 4x + 3y - 26 = 0$

$\therefore \quad \triangle ABP_2 = \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \left(\dfrac{|-26|}{\sqrt{4^2+3^2}} - 2\right)$

$= \dfrac{1}{2} \times 5 \times \left(\dfrac{26}{5} - 2\right)$

$\triangle ABP_1 = \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \left(\dfrac{|-26|}{\sqrt{4^2+3^2}} + 2\right)$

$= \dfrac{1}{2} \times 5 \times \left(\dfrac{26}{5} + 2\right)$

$\Rightarrow \quad M + m = 26$