

1. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인

원의 방정식은 $\therefore (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$

이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0 - a)^2 + (-3 - 1)^2 = 25$

$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

2. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로
중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2 \text{ 이고,}$$

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 26$$

3. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$$a = (\quad), k < (\quad)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0 \text{ 에서}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

4. 두 점 (1, 2), (2, 1)을 지나고, x 축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4

② 5

③ $4\sqrt{2}$

④ 6

⑤ $4\sqrt{3}$

해설

그 원을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 이라 하면

(1, 2), (2, 1)을 지나므로

$$(1-a)^2 + (2-b)^2 = b^2, (2-a)^2 + (1-b)^2 = b^2$$

$$1 - 2a + a^2 + 4 - 4b = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$4 - 4a + a^2 + 1 - 2b = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \times 2 - \textcircled{㉠}$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0, (a-1)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 5$$

i) $a = 1$ 이면 ① 에서 $b = 1$

ii) $a = 5$ 이면 ① 에서 $b = 5$

$\therefore$ 두 원의 중심은 (1,1), (5,5) 이다.

중심거리

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

5. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

6. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

7. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 0)$, $B(5, 0)$ 에 대하여 선분 AB 의 중점과 선분 AB 를 $1 : 3$ 으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

② $x^2 + y^2 = 4$

③ $(x - 1)^2 + y^2 = 2$

④ $x^2 + (y - 4)^2 = 16$

⑤ $x^2 + (y - 1)^2 = 2$

해설

선분 AB 의 중점은 $(3, 0)$ 이고,
선분 AB 를 $1 : 3$ 으로 외분하는 점은 $(-1, 0)$,
이 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는
원의 방정식은 중심이 $M(1, 0)$, 반지름 2 인 원이다.
따라서 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

8. 세 점 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3, -1)$

② $(2, 1)$

③ $(4, 2)$

④ $(-3, -2)$

⑤ $(3, -2)$

해설

외접원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1} \text{ 이라 하면,}$$

①은 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$$A = -4, B = -2, C = -20$$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2, 1)$

9. 모든 실수 k 에 대하여 직선 $(1+k)x+y-2k=0$ 에 대칭이고, 반지름의 길이가 3인 원의 방정식을 구하면?

① $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$

② $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$

③ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

④ $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$

⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

해설

$$(1+k)x + y - 2k = 0$$

$$x + kx + y - 2k = 0 \quad (k \text{ 는 임의의 실수})$$

$$x + y + k(x-2) = 0$$

이 직선은 항상 $(2, -2)$ 를 지난다.

따라서 이와 같은 모든 직선에 대칭인 원의 중심은 $(2, -2)$ 이다.

$$\therefore (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$$

10. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay - 4a - 5 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y+a)^2 &= 2a^2 + 4a + 5 \\ &= 2(a+1)^2 + 3\end{aligned}$$

따라서 $a = -1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a, -a) = (-1, 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

11. 중심이 직선 $3x + y = 12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

중심의 좌표는 (r, r) 이다.

따라서, 구하는 원의 방정식을

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 점 (r, r) 는 직선 $3x + y = 12$ 위에 있으므로 $3r + r = 12$

$$\therefore r = 3$$

따라서, 구하는 원의 방정식은 $\textcircled{7}$ 에서 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

12. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 까지의 거리의 비가 $1 : 2$ 인 점 $P(x, y)$ 의 자취의 길이는?

① $\frac{5}{3}\pi$

② 2π

③ $\frac{8}{3}\pi$

④ 3π

⑤ $\frac{10}{3}\pi$

해설

좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 까지의 거리의 비가 $1 : 2$ 인 점 $P(x, y)$ 의 자취는

$(-3, 0)$ 과 $(-\frac{1}{3}, 0)$ 을 지름의 양 끝으로

하는 원이다.

즉 반지름이 $\frac{2}{3}$ 이 원의 둘레의 길이는 $\frac{8}{3}\pi$ 이다.

13. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x - a + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 = 1$ 이 외접하도록 실수 a 의 값을 정하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 원을 각각 표준형으로 고치면

$(x - 1)^2 + y^2 = a - 2$, $x^2 + y^2 = 1$ 이므로

두 원의 중심 사이의 거리 d 는 $d = 1$ 이다.

두 원이 외접할 조건은 $r + r' = d$ 이므로

$$\sqrt{a - 2} + 1 = 1$$

$$\therefore a = 2$$

14. 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$ 과 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$

② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

③ $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$

④ $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 + k(x^2 + y^2 - 2x - 1) = 0$$

이 원이 원점을 지나므로

$x = y = 0$ 을 대입하면

$$-2 - k = 0$$

$$\therefore k = -2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 - 2(x^2 + y^2 - 2x - 1) = 0$$

$$-x^2 - y^2 + 6x - 4y = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

15. 원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a 의 값의 합은?

① -4

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$ 이

원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분하려면
두 원의 공통현이

원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은

$$(1+a)x + (a+1)y + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦이 점 $(-1, -a)$ 를 지나므로

$$(1+a) \times (-1) + (a+1) \times (-a) - 2 = 0$$

$$a^2 + 2a = 0$$

$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해 -2

16. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

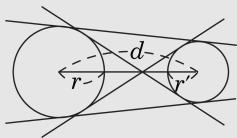
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r - r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

$r + r' = 5, r - r' = 1, d = 9$ 이므로

$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
4 개



17. 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원 O, O'의 중심거리가 5일 때, 두 원의 공통내접선의 길이는?

① 3

② 4

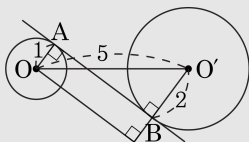
③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

주어진 두 원의 그래프를 다음 그림과 같이 나타내면 $\overline{AB}$ 가 공통내접선이 된다.



점 O에서 선분 O'B의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AO} = \overline{BH} = 1$$

$$\therefore \overline{O'H} = 1 + 2 = 3$$

이때, 두 원의 중심거리가 5이므로

$\triangle OHO'$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

18. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$$

따라서, 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선

$3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는

$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0개

19. 직선 $(a-1)x - (a-2)y - 1 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0, (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

따라서 원의 중심 $(1, 2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a-1) \times 1 - (a-2) \times 2 - 1 = 0$

$$\therefore a = 2$$

20. 두 점 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ 과 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 이 있다. 이 원 위에 있는 한 점 $P(a, b)$ 를 잡아 $\triangle PAB$ 를 만들 때, $\triangle PAB$ 의 무게중심의 자취는 원이다. 이 자취의 길이를 구하면?

① $\frac{5}{3}\pi$

② $\frac{5}{2}\pi$

③ $\frac{4}{3}\pi$

④ $\frac{10}{3}\pi$

⑤ $\frac{9}{4}\pi$

해설

점 $P(a, b)$ 는 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위에 있으므로
 $a^2 + b^2 - 8b - 9 = 0 \cdots \textcircled{1}$

$\triangle PAB$ 의 무게중심의 좌표를 (x, y) 라고 하면,

$$x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$$

$$\therefore a = 3x, b = 3y$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$(3x)^2 + (3y)^2 - 8(3y) - 9 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y = 1$$

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\therefore r = \frac{5}{3}$$

$$\therefore l = 2\pi r = 2 \times \frac{5}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

21. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 의 교점을 P, Q라할 때, 선분 PQ의 길이를 최대로 하는 양수 r 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

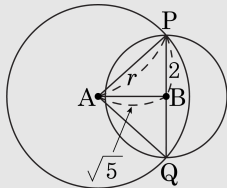
$$A : x^2 + y^2 = r^2, B : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

라고 하면

$\overline{PQ}$ 가 원 B의 지름일 때

$\overline{PQ}$ 의 길이는 최대가 된다.

$$\therefore r = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$$



22. 반지름의 길이가 각각 3 cm, 5 cm 이고, 중심거리가 10 cm 인 두 원의 공통외접선의 길이와 공통내접선의 길이를 각각 x , y 라 할 때, $x^2 - y^2$ 의 값은?

① -60

② -36

③ 36

④ 60

⑤ 96

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{d^2 - (r + r')^2}$ 이므로

$$\sqrt{10^2 - (5 + 3)^2} = \sqrt{36} \text{ 이고}$$

공통외접선의 길이는 $\sqrt{d^2 - (r - r')^2}$ 이므로

$$\sqrt{10^2 - (5 - 3)^2} = \sqrt{96} \text{ 이다.}$$

그러므로 $x^2 - y^2 = 96 - 36 = 60$ 이다.

23. 두 점 A(-1, 3), B(2, a) 를
지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접할 때, a의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 A(-1, 3), B(2, a) 를

지나는 직선의 방정식은, $y - 3 = \frac{a - 3}{3}(x + 1)$

$$\therefore (a - 3)x - 3y + a + 6 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

직선 $\textcircled{7}$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하므로

원의 중심 (0, 0) 에서 직선 $\textcircled{7}$ 에 이르는 거리가
원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$$\therefore \frac{|a + 6|}{\sqrt{(a - 3)^2 + 9}} = 1$$

$$\therefore |a + 6| = \sqrt{(a - 3)^2 + 9} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 의 양변을 제곱하면 $a^2 + 12a + 36 = a^2 - 6a + 9 + 9, 18a = -18$

$$\therefore a = -1$$

24. 반지름이 20인 원의 내부에 중심으로부터 12만큼 떨어져 있는 점 P가 있다. 점 P를 지나고 길이가 정수인 현의 갯수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 16 개

해설

점 P를 지나는 가장 긴 현은 지름 AB이고, 가장 짧은 현은 지름에 수직인 현 CD이다.

$$\overline{CD} = 2\sqrt{20^2 - 12^2} = 32, \overline{AB} = 40$$

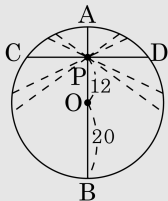
점 P를 중심으로 현을 회전시키면 32와 40 사이에 모든 실수 길이의 현이 두 번씩 나타난다.

따라서 길이가 정수인 현은

32, 40인 것이 한 개,

33, 34, 35, 36, 37, 38, 39인 것이 각각 두 개씩 있다.

∴ 16개



25. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5

② $\sqrt{26}$

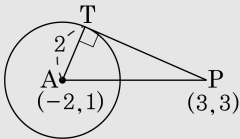
③ 6

④ $\sqrt{37}$

⑤ 7

해설

준식에서 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$ 이므로
중심이 $(-2, 1)$ 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\begin{aligned}\overline{PT}^2 &= \overline{PA}^2 - \overline{AT}^2 \\ &= (3 + 2)^2 + (3 - 1)^2 - 2^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PT} = 5$$