

1. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 을 $3x - 2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(1) + R$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\begin{aligned} 6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 &= (3x - 2)Q(x) + R \\ \text{양변에 } x = 1 \text{을 대입하면, } 13 &= Q(1) + R \\ \therefore Q(1) + R &= 13 \end{aligned}$$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 를 $3x - 2$ 로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

2. $x^3 - 2x^2 + a$ 가 $x+3$ 로 나누어 떨어지도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 45$

해설

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 - 2(-3)^2 + a = a - 45 = 0 \\ \therefore a &= 45 \end{aligned}$$

3. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \bar{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\bar{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$\begin{aligned}(a + bi)(1 - i) + 1 &= a - ai + bi + b + 1 \\ &= (a + b + 1) - (a - b)i \\ &= a - bi \text{ 에서}\end{aligned}$$

$$a + b + 1 = a, \therefore b + 1 = 0 \text{ 이므로 } b = -1$$

$$a - b = b \text{ 이므로 } a + 1 = -1 \text{ 에서 } a = -2$$

따라서 w 의 실수부분은 -2

4. x 에 대한 이차방정식 $kx^2 + 2(k+1)x + k = 0$ 이 중근을 가질 때 k 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$\frac{D}{4} = b'^2 - ac = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \text{에서}$$

중근을 가질 조건이므로

$$\frac{D}{4} = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$2k+1=0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

5. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 10$ 의 최댓값을 M , $y = 3x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 2x + 10 \\&= -(x-1)^2 + 11, \quad M = 11 \\y &= 3x^2 + 6x - 5 \\&= 3(x+1)^2 - 8, \quad m = -8 \\\therefore M + m &= 11 - 8 = 3\end{aligned}$$

6. $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5를 갖는 포물선의 식은 $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2 + 5$ 이다. $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2 + 5 = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$ 따라서 y 의 절편은 2이다.

7. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ ($0 \leq x \leq 3$) 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 \text{ 에서}$$

$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,

$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0

$$\text{최댓값} + \text{최솟값} = -4$$

8. 다음 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\text{}x^2 + \text{}x + \text{}) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\text{}x^2 + \text{}x + \text{} = A$ 라 하면
 $(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$
 $\therefore A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$
 $\therefore A = x^2 + 2x - 1$ 이므로
안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1 이다.

9. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ 에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 일 때, 상수 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0, 1, 2$ 를 차례로 대입하면,
 $x = 0$ 일 때, $-1 = C$
 $x = 1$ 일 때, $5 = 1 + A + B + C$
 $x = 2$ 일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
 $A = -6, B = 11, C = -1$

10. x 에 관계없이 $\frac{x-a}{2x-b}$ 가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{x-a}{2x-b} &= k \text{라 놓으면,} \\ (2k-1)x + (a-bk) &= 0 \\ \therefore 2k-1 &= 0, a=bk \text{이므로} \\ k &= \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}b \text{이다.} \\ \therefore \frac{b}{a} &= 2\end{aligned}$$

11. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지는 -5 이고, $x-1$ 로 나눈 나머지는 -1 이다. 이때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$

② $2x+3$

③ $2x-1$

④ $2x$

⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b$$

한편, $f(x)$ 를 $x+1$, $x-1$ 로 나눈 나머지가 각각 -5 , -1 이므로

$$f(-1) = -a + b = -5, \quad f(1) = a + b = -1$$

이것을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $2x-3$ 이다.

12. 다항식 $(x+2)f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 9, 다항식 $(2x-3)f(3x-7)$ 을 $x-3$ 으로 나눈 나머지가 -3 이다. 이때 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지는?

① $-4x+7$

② $-4x-3$

③ $2x+3$

④ $2x-3$

⑤ $3x-1$

해설

나머지정리에 의하여

$(x+2)f(x)$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$3f(1)=9 \text{ 이므로 } f(1)=3 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$(2x-3)f(3x-7)$ 에 $x=3$ 을 대입하면

$$3f(2)=-3 \text{ 이므로 } f(2)=-1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ 에 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 대입하면

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

이므로 $a=-4, b=7$

14. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right) \\ &= f(i^2) + f((-i)^2) \\ &= f(-1) + f(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

15. $\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{a+1}{a}}$ 일 때, $|a-1| + |a| + |a+1|$ 을 간단히 하면?

① $-a+2$

② $-a$

③ 2

④ a

⑤ $a-2$

해설

$a+1 \geq 0, a < 0 \Rightarrow -1 \leq a < 0$
 $\therefore (\text{준식}) = -(a-1) - (a) + (a+1)$
 $= -a+2$

16. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.
- ㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.
- ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
- ㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉣

③ ㉠, ㉡, ㉣
- ④ ㉡, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$
㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>
㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>
㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>
㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1+k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai(a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

17. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라고 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$ 의 두 실근이다.

이 때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = k$ 이고

x 축 위의 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4\sqrt{2}$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{에서 } (4\sqrt{2})^2 = (-2)^2 - 4k, 32 = 4 - 4k$$

$$\therefore k = -7$$

18. 직선 $y = mx - 1$ 은 곡선 $y = x^2 + x$ 와 서로 다른 두 점에서 만나고, 곡선 $y = x^2 - x$ 와는 만나지 않는다고 한다. 이때, 실수 m 의 값의 범위는?

- ① $1 < m < 3$ ② $-1 < m < 3$ ③ $-1 < m < 1$
④ $-3 < m < 1$ ⑤ $-3 < m < -1$

해설

- (i) 직선 $y = mx - 1$ 과 곡선 $y = x^2 + x$ 가 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 + (1 - m)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라하면
 $D_1 = (1 - m)^2 - 4 > 0$ 에서 $m^2 - 2m - 3 > 0$
 $\therefore m < -1$ 또는 $m > 3 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
(ii) 직선 $y = mx - 1$ 과 곡선 $y = x^2 - x$ 는 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 - (m + 1)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
 $D_2 = (m + 1)^2 - 4 < 0$ 에서 $m^2 + 2m - 3 < 0$
 $\therefore -3 < m < 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
따라서 ①, ②의 공통범위를 구하면
 $-3 < m < -1$

19. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 + 8 = 12(x^2 + x)$ 의 모든 근의 합은?

- ① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$x^2 + x = Y \text{ 라 하면, } (Y + 2)^2 + 8 = 12Y$$

$$Y^2 - 8Y + 12 = 0, (Y - 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = 2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$(i) Y = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$(ii) Y = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore \text{ 모든 근의 합} = -2$$

20. $x^4 - 11x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)$ 로 인수분해될 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 11x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - 9x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\&= (x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\&= (x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4$$

21. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1
일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z 라 하면 주어진 조건으로부터
 $x + y + z = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ 이므로
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}$ 에서 $0^2 = 1 + 2(xy + yz + zx)$
 $\therefore xy + yz + zx = -\frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉡}$ 에서 $\frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{3}{2}$ 이므로
 $3xyz = 2(xy + yz + zx)$
 $\therefore xyz = -\frac{1}{3}$
또, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $x + y + z = 0$ 이므로
 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

22. 최고차항의 계수가 1 인 두 이차다항식 A, B 에 대하여 A, B 의 최대공약수를 (A, B) , A, B 의 최소공배수를 $[A, B]$ 라 하자. 다항식 A, B 가

$$(A + B, A - B) = 2x - 3, [A + B, A - B] = 2x^2 + x - 6$$

을 만족할 때, $2[A, B] = 0$ 과 같은 해를 갖는 것은?

- ① $2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$ ② $x^3 + 4x^2 - 2x - 7$
 ③ $x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ ④ $3x^3 - x^2 + 2x - 1$
 ⑤ $-x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

해설

$A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소) 라 하자.
 $(A + B, A - B) = ((a + b)G, (a - b)G) = 2x - 3$ 이므로
 G 는 $2x - 3$
 따라서 A, B 는 $2x - 3$ 으로 나누어떨어지고 a, b 는 일차식이다.
 또 $[A + B, A - B] = [(a + b)G, (a - b)G] = 2x^2 + x - 6$
 $= (x + 2)(2x - 3)$ 이므로 $(a + b)(a - b)G = (x + 2)(2x - 3)$
 $\therefore (a + b)(a - b) = x + 2$ 이고
 a, b 는 모두 일차식이므로
 $a + b = x + 2, a - b = 1$ 이라 하고 연립하여 풀면
 $a = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$
 $b = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 $\therefore [A, B] = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)(2x - 3)$
 $= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right)(2x - 3)$
 $= \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{8}{4}x^2 - 3x + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$
 $= \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$
 $\therefore 2[A, B] = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2}$
 따라서 $2[A, B]$ 와 같은 것은 ① $2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$ 이다.

- 23.** 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P 가 그리는 도형은?
- ① 원 ② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선 ④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi) \\ &= (2a+3b) + (2b-3a)i \\ \therefore 2b-3a &= 0 \quad \therefore b = \frac{3}{2}a \Rightarrow \text{기울기가 양인 직선}\end{aligned}$$

24. x, y 에 대한 이차식 $f(x, y) = x^2 + 2(y - 1)x + y^2 + ky - 3$ 이 x, y 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

- ① -3
- ② -2
- ③ -1
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y - 1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면
근의 공식에 의하여
$$x = -(y - 1) \pm \sqrt{(y - 1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$$
$$= -(y - 1) \pm \sqrt{-(2 + k)y + 4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이면
 $x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$ 이고
준식이 x, y 의 일차식으로 인수분해되므로
 x 의 두 근 $\textcircled{1}$ 에서 $-(2 + k)y + 4$ 가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.
따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.
$$\therefore D = (2 + k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$$
$$2 + k = 0$$
$$\therefore k = -2$$

25. x 의 이차방정식 $x^2 + (2m - 1)x + m^2 - m - 2 = 0$ 의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$D = (2m - 1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0 \text{이므로}$$

서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 근을 α , 2α 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = -(2m - 1) > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \times 2\alpha = m^2 - m - 2 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$m < -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

또, ㉠에서의 $\alpha = \frac{1 - 2m}{3}$ 을 ㉡에 대입하여 풀면 $m = -4, 5$

조건 ㉢에 의해서 $m = -4$

26. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1

② -2

③ 3

④ -4

⑤ 5

해설

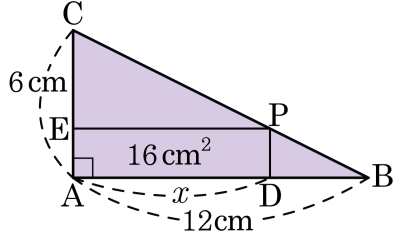
$$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x + k)^2 + k^2 + 4k$$

$$M = k^2 + 4k \text{ 이므로}$$

$$M = (k + 2)^2 - 4 \text{ 이다.}$$

따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

27. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 12\text{cm}$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗면 위에 점 P 를 잡아 직사각형 EADP 를 만들었을 때, 이 직사각형의 넓이가 16cm^2 이었다. 이 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{AD} > 6\text{cm}$)



- ① 7cm ② 8cm ③ 9cm ④ 10cm ⑤ 11cm

해설

$\triangle CEP \sim \triangle CAB$ (AA닮음) 이므로

$$\overline{CE} : \overline{EP} = \overline{CA} : \overline{AB}$$

$$\text{즉, } \overline{CE} : x = 6 : 12$$

$$\therefore \overline{CE} = \frac{1}{2}x$$

$$\text{따라서 } \overline{EA} = 6 - \frac{1}{2}x \text{ 이므로 } x \left(6 - \frac{1}{2}x \right) = 16$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 6x = 16$$

$$x^2 - 12x + 32 = (x - 4)(x - 8) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

$$\text{그런데 } 6 < x < 12 \text{ 이므로 } x = 8(\text{cm})$$

28. 사차방정식 $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 해는?

- ① $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$
② $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
③ $x = \frac{-15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
④ $x = \frac{15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
⑤ $x = 15 \pm \sqrt{221}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 8x + 17 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0$$

$\therefore x + \frac{1}{x} = A$ 라 하자.

$$A^2 + 8A + 15 = (A + 3)(A + 5)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 5\right) = 0$$

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

29. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
 - ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
 - ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
 - ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
 - ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\begin{aligned} \frac{a-b+c}{a+b+c} &= \frac{-a-b+c}{a-b-c} \text{에서} \\ (a-b+c)(a-b-c) &= (a+b+c)(-a-b+c) \\ (a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) &= 0 \\ (\text{좌변}) \\ &= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} \\ &= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 \\ \text{따라서, } 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 &= 0 \text{ 이므로 } a^2 + b^2 = c^2 \\ \text{그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 } c \text{인 직각삼각형이다.} \end{aligned}$$

30. $a + b = 1$ 이고 $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{2005} + b^{2005}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

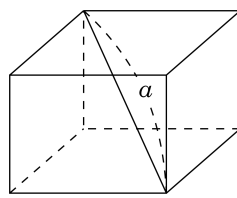
해설

$b = 1 - a$ 를 $a^2 + b^2$ 에 대입하여 정리하면
 $a^2 - a + 1 = 0 \quad (a + 1)(a^2 - a + 1) = 0$
 $a^3 + 1 = 0 \quad \therefore a^3 = -1$
마찬가지 방법으로 $b^3 = -1$
 $a^{2005} + b^{2005} = (a^3)^{668} \cdot a + (b^3)^{668} \cdot b = a + b = 1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.
 $a^2 - a + 1 = 0$ 에서 $a^2 = a - 1$
 $a^3 = a^2 \cdot a = (a - 1) \cdot a = a^2 - a = -1$
마찬가지 방법으로 $b^3 = -1$

31. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a 이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b 일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



- ☒ ① $\frac{1}{16}b^2 - a^2$
 ☐ ② $\frac{1}{8}b^2 - a^2$
 ☐ ③ $\frac{1}{4}b^2 - a^2$
☐ ④ $\frac{1}{8}b^2 + a^2$
 ☐ ⑤ $\frac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z 라 하면

$$4(x + y + z) = b, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$$

$$\therefore x + y + z = \frac{1}{4}b, x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned}
 2(xy + yz + zx) &= (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \\
 &= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2 \\
 &= \frac{1}{16}b^2 - a^2
 \end{aligned}$$

32. 복소수 α, β 는 $\alpha\bar{\alpha} = 1, \beta\bar{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

- ① -1
- ② 1
- ③ $1+i$
- ④ $1-i$
- ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$\alpha + \beta = i$ 에서 $\overline{\alpha + \beta} = \bar{i} \therefore \bar{\alpha} + \bar{\beta} = -i \cdots \textcircled{1}$

$\alpha\bar{\alpha} = 1, \beta\bar{\beta} = 1$ 에서

$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \bar{\beta} = \frac{1}{\beta} \cdots \textcircled{2}$

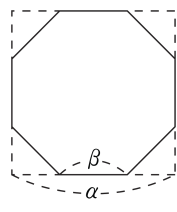
$\textcircled{2}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -i, \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -i, \frac{i}{\alpha\beta} = -i$

$\therefore \alpha\beta = -1$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2 \cdot (\alpha\beta)$
 $= i^2 - 2 \cdot (-1)$
 $= 1$

33. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α 인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β 라 하면, α, β 는 이차방정식 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p 의 값으로 옳은 것은?



- ① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2} - 1$
 ② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$
 ③ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2}$
 ④ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2} - 2$
 ⑤ $\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad p = -\sqrt{2} - 1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β 인 직각이등변삼각형이므로 다른 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$ 이다.

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha \text{ 이므로}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)\alpha$$

α, β 는 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha\beta = (\sqrt{2} - 1)\alpha^2 = \sqrt{2} + 1 \text{ 에서}$$

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\alpha > 0 \text{ 이므로 } \alpha = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore p = -(\alpha + \beta) = -\{\alpha + (\sqrt{2} - 1)\alpha\} = -\sqrt{2} - 2$$

34. 방정식 $x^{11} = 1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1)$ 의 값은?

① 1 ② -1 ③ i ④ $-i$ ⑤ 10

해설

$x^{11} - 1 = (x - 1)(x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1)$ 이므로 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = 0$ 의 10개의 근이다.

$\therefore x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x = -1$ 을 대입하면 $1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1 = (-1 - \alpha_1)(-1 - \alpha_2) \cdots (-1 - \alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1) = 1$

35. 삼차 방정식의 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 하고, 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \frac{w^n}{1 + w^{2n}}$ 이라 할 때, $f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow w^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\rightarrow w^2 + w + 1 = 0$$

$$f(3n) = \frac{w^{3n}}{1 + w^{6n}} = \frac{(w^3)^n}{1 + (w^3)^{2n}} = \frac{1}{2}$$

$$f(3n+1) = \frac{w^{3n+1}}{1 + w^{6n+2}} = \frac{w}{1 + w^2} = -1$$

$$f(3n+2) = \frac{w^{3n+2}}{1 + w^{6n+4}} = \frac{w^2}{1 + w} = -1$$

즉 $-1, -1, \frac{1}{2}$ 가 계속 반복되고

항이 번갈아 가면서 부호가 바뀌므로

순서대로 6개의 항까지의 값이 0이 된다.

$$\therefore f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$$

$$= (-1) - (-1) + \frac{1}{2} - (-1) + \cdots + f(19)$$

$$= 0 + f(19) = -1$$