1. 다항식 $6x^3-7x^2+17x-3$을 $3x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1)+R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6x^3-7x^2+17x-3=(3x-2)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면, $13=Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)+R=13$

해설

$6x^3-7x^2+17x-3$를 $3x-2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

2. x^3-2x^2+a 가 $x+3$ 로 나누어 떨어지도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=45$

해설

$f(-3)=(-3)^3-2(-3)^2+a=a-45=0$

$\therefore\ a=45$

3. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$(a+bi)(1-i)+1 = a - ai + bi + b + 1$$
$$= (a+b+1) - (a-b)i$$
$$= a - bi \text{ 에서}$$

$a + b + 1 = a$, $\therefore$ $b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

4. x에 대한 이차방정식 $kx^2+2(k+1)x+k=0$이 중근을 가질 때 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$\frac{D}{4}=b'^2-ac=(k+1)^2-k^2=2k+1$에서

중근을 가질 조건이므로

$\frac{D}{4}=0$이어야 한다.

$2k+1=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

5. 이차함수 $y=-x^2+2x+10$ 의 최댓값을 M , $y=3x^2+6x-5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y=-x^2+2x+10$$
$$=-(x-1)^2+11,\ M=11$$
$$y=3x^2+6x-5$$
$$=3(x+1)^2-8,\ m=-8$$
$$\therefore M+m=11-8=3$$

6. $y=-\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x=-3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$y=-\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x=-3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ 이다. $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+5=-\frac{1}{3}x^2-2x+2$

따라서 y 의 절편은 2 이다.

7. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3\ (0 \le x \le 3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 에서

$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,

$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0

최댓값+최솟값$= -4$

8. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\square x^2+\square x+\square=A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$

$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

$\therefore\ A=x^2+2x-1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 $1,\ 2,\ -1$이다.

9. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$일 때, 상수$A \times B \times C$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots ㉠ \end{aligned}$$

㉠은 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x = 0,\ 1,\ 2$를 차례로 대입하면,

$x = 0$일 때, $-1 = C$

$x = 1$일 때, $5 = 1 + A + B + C$

$x = 2$일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$A = -6,\ B = 11,\ C = -1$

10. x에 관계없이 $\dfrac{x-a}{2x-b}$가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\dfrac{b}{a}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\dfrac{x-a}{2x-b} = k$라 놓으면,

$(2k-1)x + (a-bk) = 0$

$\therefore\ 2k-1=0,\ a=bk$이므로

$k = \dfrac{1}{2},\ a = \dfrac{1}{2}b$이다.

$\therefore\ \dfrac{b}{a} = 2$

11. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 -5이고, $x-1$로 나눈 나머지는 -1이다. 이때, $f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$　　② $2x+3$　　③ $2x-1$

④ $2x$　　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

한편, $f(x)$를 $x+1$, $x-1$로 나눈 나머지가 각각 -5, -1이므로

$f(-1)=-a+b=-5$, $f(1)=a+b=-1$

이것을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $2x-3$이다.

12. 다항식 $(x+2)f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 9, 다항식 $(2x-3)f(3x-7)$을 $x-3$으로 나눈 나머지가 -3이다. 이때 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $-4x+7$　　② $-4x-3$　　③ $2x+3$

④ $2x-3$　　⑤ $3x-1$

해설

나머지정리에 의하여

$(x+2)f(x)$에 $x=1$을 대입하면

$3f(1)=9$이므로 $f(1)=3 \cdots$ ㉠

$(2x-3)f(3x-7)$에 $x=3$을 대입하면

$3f(2)=-3$이므로 $f(2)=-1 \cdots$ ㉡

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

이므로 $a=-4,\ b=7$

13. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \quad \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \quad \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1)$, $(4,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 1,\ 3)$ 3개

14. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$$f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$$
$$=f(i^2)+f((-i)^2)$$
$$=f(-1)+f(-1)$$
$$=0$$

15. $\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}$ 일 때, $|a-1|+|a|+|a+1|$을 간단히 하면?

① $-a+2$　　② $-a$　　③ 2

④ a　　⑤ $a-2$

해설

$a+1 \geq 0,\ a < 0 \Rightarrow -1 \leq a < 0$

$\therefore$ (준식) $= -(a-1)-(a)+(a+1)$

$= -a+2$

16. 이차방정식 $x^2-2ix-k=0$ 의 근에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k>1$ 이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k=1$ 이면 중근을 갖는다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0<k<1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉣　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2-2ix-k=0$ 의 근을 구하면 $x=i\pm\sqrt{-1+k}$

㉠ $k>1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k=1$ 이면 $x=i$ 로 중근을 갖는다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0<k<1$이면 $-1<-1+k<0$이므로 $\sqrt{-1+k}=ai(a\neq1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

17. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -8　② -7　③ -6　④ -5　⑤ -4

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha < \beta)$ 라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$ 의 두 실근이다.
이 때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = k$ 이고
x축 위의 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4\sqrt{2}$
$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서 $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = (-2)^2 - 4k$, $32 = 4 - 4k$
$\therefore k = -7$

18. 직선 $y = mx - 1$은 곡선 $y = x^2 + x$와 서로 다른 두 점에서 만나고, 곡선 $y = x^2 - x$와는 만나지 않는다고 한다. 이때, 실수 m의 값의 범위는?

① $1 < m < 3$ ② $-1 < m < 3$ ③ $-1 < m < 1$

④ $-3 < m < 1$ ⑤ $-3 < m < -1$

해설

(ⅰ) 직선 $y = mx - 1$ 과 곡선 $y = x^2 + x$ 가
서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 + (1 - m)x + 1 = 0$의 판별식을 D_1 이라하면
$D_1 = (1 - m)^2 - 4 > 0$에서 $m^2 - 2m - 3 > 0$
$\therefore m < -1$ 또는 $m > 3 \cdots$ ㉠

(ⅱ) 직선 $y = mx - 1$과 곡선 $y = x^2 - x$는 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 - (m + 1)x + 1 = 0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2 = (m + 1)^2 - 4 < 0$에서 $m^2 + 2m - 3 < 0$
$\therefore -3 < m < 1 \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통범위를 구하면
$-3 < m < -1$

19. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1　　② 0　　③ -1　　④ -2　　⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$

$Y^2-8Y+12=0,\ (Y-2)(Y-6)=0$

$Y=2$ 또는 $Y=6$

(i) $Y=2$

$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $Y=6$

$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

20. $x^4 - 11x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)$ 로 인수분해될 때, $a + b$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 11x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - 9x^2 \\ &= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\ &= (x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\ &= (x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b) \end{aligned}$$

$\therefore\ a = -3,\ b = -1$

$\therefore\ a + b = -4$

21. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

22. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B에 대하여 A, B의 최대공약수를 $(A,\ B)$, A, B의 최소공배수를 $[A,\ B]$라 하자. 다항식 A, B가

$$(A+B,\ A-B)=2x-3,\ [A+B,\ A-B]=2x^2+x-6$$

을 만족할 때, $2[A,\ B]=0$과 같은 해를 갖는 것은?

① $2x^3+5x^2-6x-9$　② x^3+4x^2-2x-7
③ x^3-3x^2+5x-1　④ $3x^3-x^2+2x-1$
⑤ $-x^3+2x^2-5x+7$

해설

$A=aG,\ B=bG\ (a,b$는 서로소$)$라 하자.
$(A+B, A-B)=((a+b)G,\ (a-b)G)=2x-3$ 이므로
G는 $2x-3$
따라서 A,B는 $2x-3$으로 나누어떨어지고 a, b는 일차식이다.
또 $[A+B, A-B]=[(a+b)G, (a-b)G]=2x^2+x-6$
$=(x+2)(2x-3)$ 이므로 $(a+b)(a-b)G=(x+2)(2x-3)$
$\therefore\ (a+b)(a-b)=x+2$ 이고
a, b는 모두 일차식이므로
$a+b=x+2$, $a-b=1$ 이라 하고 연립하여 풀면
$a=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,
$b=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
$\therefore\ [A, B]=\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)(2x-3)$
$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right)(2x-3)$
$=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{8}{4}x^2-3x+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$
$=\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$
$\therefore\ 2[A, B]=x^3+\frac{5}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$
따라서 $2[A, B]$와 같은 것은 ① $2x^3+5x^2-6x-9$ 이다.

23. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은?

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b) + (2b-3a)i$$

$\therefore\ 2b - 3a = 0 \quad \therefore\ b = \dfrac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

24. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y)=x^2+2(y-1)x+y^2+ky-3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2+2(y-1)x+y^2+ky-3=0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$$x=-(y-1)\pm\sqrt{(y-1)^2-(y^2+ky-3)}$$
$$=-(y-1)\pm\sqrt{-(2+k)y+4}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

한편, $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면

$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$ 이고

준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y+4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.

$\therefore\ D=(2+k)^2-4\cdot 0\cdot 4=0$

$2+k=0$

$\therefore\ k=-2$

25. x의 이차방정식 $x^2+(2m-1)x+m^2-m-2=0$의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$D=(2m-1)^2-4(m^2-m-2)=9>0$이므로

서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 근을 $\alpha,\ 2\alpha$라 하면

$\alpha+2\alpha=-(2m-1)>0\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\times2\alpha=m^2-m-2>0\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$m<-1\quad\cdots\cdots$ ㉢

또, ㉠에서의 $\alpha=\dfrac{1-2m}{3}$을 ㉡에 대입하여 풀면 $m=-4,\ 5$

조건 ㉢에 의해서 $m=-4$

26. 이차함수 $y=-x^2-2kx+4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② -2 ③ 3 ④ -4 ⑤ 5

해설

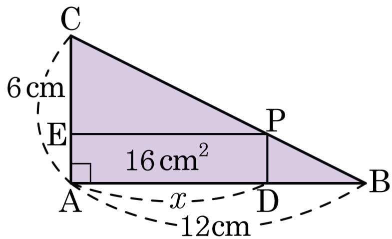
$y=-x^2-2kx+4k=-(x+k)^2+k^2+4k$

$M=k^2+4k$ 이므로

$M=(k+2)^2-4$ 이다.

따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

27. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=12\text{cm}$, $\overline{AC}=6\text{cm}$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 위에 점 P 를 잡아 직사각형 EADP 를 만들었을 때, 이 직사각형의 넓이가 16cm^2 이었다. 이 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{AD}>6\text{cm}$)



① 7cm ② 8cm ③ 9cm ④ 10cm ⑤ 11cm

해설

$\triangle CEP \backsim \triangle CAB$ (AA닮음) 이므로

$\overline{CE}:\overline{EP} = \overline{CA}:\overline{AB}$

즉, $\overline{CE}:x=6:12$

$\therefore \overline{CE}=\frac{1}{2}x$

따라서 $\overline{EA}=6-\frac{1}{2}x$ 이므로 $x\left(6-\frac{1}{2}x\right)=16$

$-\frac{1}{2}x^2+6x=16$

$x^2-12x+32=(x-4)(x-8)=0$

$\therefore\ x=4$ 또는 $x=8$

그런데 $6<x<12$ 이므로 $x=8(\text{cm})$

28. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

② $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

③ $x=\frac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

④ $x=\frac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+8x+17+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$$

$\therefore x+\frac{1}{x}=A$라 하자.

$$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=0$$

$$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

29. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

30. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면

$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$

$a^3+1=0$ $\quad\therefore\ a^3=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

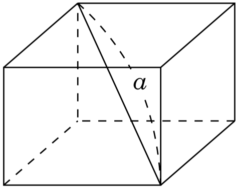
a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.

$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$

$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

31. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\dfrac{1}{16}b^2 - a^2$ ② $\dfrac{1}{8}b^2 - a^2$ ③ $\dfrac{1}{4}b^2 - a^2$

④ $\dfrac{1}{8}b^2 + a^2$ ⑤ $\dfrac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면

$4(x+y+z) = b,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$

$\therefore\ x+y+z = \dfrac{1}{4}b,\ x^2+y^2+z^2 = a^2$

따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned}2(xy+yz+zx) &= (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\\ &= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2\\ &= \frac{1}{16}b^2 - a^2\end{aligned}$$

32. 복소수 α, β는 $\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$을 만족하고 $\alpha + \beta = i$이다. 이 때 $\alpha^2 + \beta^2$의 값은?

① -1 ② 1 ③ $1+i$ ④ $1-i$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$\alpha + \beta = i$ 에서 $\overline{\alpha + \beta} = \overline{i}$ $\therefore$ $\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -i \cdots$ ㉠

$\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$ 에서

$\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, $\overline{\beta} = \frac{1}{\beta} \cdots$ ㉡

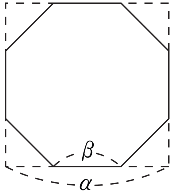
㉡를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -i$, $\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -i$, $\frac{i}{\alpha\beta} = -i$

$\therefore$ $\alpha\beta = -1$

$$\begin{aligned} \therefore\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2 \cdot (\alpha\beta) \\ &= i^2 - 2 \cdot (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

33. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β라 하면, α, β는 이차방정식 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p의 값으로 옳은 것은?



① $\alpha=\sqrt{2},\quad p=\sqrt{2}-1$

② $\alpha=\sqrt{2},\quad p=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1$

③ $\alpha=\sqrt{2}+1,\quad p=-\sqrt{2}$

④ $\alpha=\sqrt{2}+1,\quad p=-\sqrt{2}-2$

⑤ $\alpha=\sqrt{2}-1,\quad p=-\sqrt{2}-1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β인 직각이등변삼각형이므로

다른 한 변의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta$이다.

$2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta+\beta=\alpha$이므로

$\beta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)\alpha$

$\alpha,\ \beta$는 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이므로

$\alpha\beta=(\sqrt{2}-1)\alpha^2=\sqrt{2}+1$에서

$\alpha^2=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$

$\alpha>0$이므로 $\alpha=\sqrt{2}+1$

$\therefore\ p=-(\alpha+\beta)=-\left\{\alpha+(\sqrt{2}-1)\alpha\right\}=-\sqrt{2}-2$

34. 방정식 $x^{11}=1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)$ 의 값은?

① 1 ② -1 ③ i ④ $-i$ ⑤ 10

해설

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$ 이므로 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10}+x^9+\cdots+x+1=0$ 의 10개의 근이다.

$\therefore\ x^{10}+x^9+\cdots+x+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x=-1$ 을 대입하면 $1-1+1-\cdots-1+1=(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)\cdots(-1-\alpha_{10})$

$\therefore(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_{10}+1)=1$

35. 삼차 방정식의 $x^3-1=0$의 한 허근을 w라 하고, 자연수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{w^n}{1+w^{2n}}$이라 할 때, $f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\cdots+f(19)$의 값은?

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

해설

$x^3-1=0 \quad \rightarrow \quad w^3=1$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\rightarrow w^2+w+1=0$

$$f(3n)=\frac{w^{3n}}{1+w^{6n}}=\frac{(w^3)^n}{1+(w^3)^{2n}}=\frac{1}{2}$$

$$f(3n+1)=\frac{w^{3n+1}}{1+w^{6n+2}}=\frac{w}{1+w^2}=-1$$

$$f(3n+2)=\frac{w^{3n+2}}{1+w^{6n+4}}=\frac{w^2}{1+w}=-1$$

즉 $-1,\ -1,\ \dfrac{1}{2}$가 계속 반복되고

항이 번갈아 가면서 부호가 바뀌므로

순서대로 6개의 항까지의 값이 0이 된다.

$\therefore \quad f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\cdots+f(19)$

$=(-1)-(-1)+\dfrac{1}{2}-(-1)+\cdots+f(19)$

$=0+f(19)=-1$