

1. 자연수 n 에 대하여 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 이라고 정의한다. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 1000 = x^{500} \times y!$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 502

해설

$$\begin{aligned} & 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 1000 \\ &= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times (2 \times 4) \times \cdots \times (2 \times 500) \\ &= 2^{500} \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 500) \\ &= 2^{500} \times 500! \\ &\therefore x = 2, y = 500 \\ &\therefore x + y = 502 \end{aligned}$$

2. 두 분수 $\frac{7}{176}$, $\frac{11}{140}$ 에 어떤 세 자리 자연수 A 을 곱한 값은 모두 유한 소수가 된다. 이것을 만족하는 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 11 개

해설

$$\frac{7}{176} \times A = \frac{7 \times A}{2^4 \times 11}, \quad \frac{11}{140} \times A = \frac{11 \times A}{2^2 \times 5 \times 7}$$

이 두 수가 두 유한소수가 되려면 분모에 2 나 5 이외의 소인수가 없어야 하므로 A 는 7 과 11 의 공배수, 즉 77 의 배수가 되어야 한다.

77 의 배수 중 세 자리 자연수는

$77 \times 2 = 154$, $77 \times 3 = 231$, $\dots$, $77 \times 12 = 924$ 이므로 구하는 수의 개수는 $12 - 1 = 11$ (개)

3. 세 자리 자연수 x 에 대하여 $\frac{x}{315}$ 는 유한소수이고, $\frac{4x}{63}$ 는 어떤 자연수의 제곱이다. 이것을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 252

▷ 정답 : 567

해설

$\frac{x}{315} = \frac{x}{3^2 \times 5 \times 7}$ 가 유한소수가 되려면 x 는 63 의 배수이어야 한다.

즉, $x = 63k$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.

$$\frac{4x}{63} = \frac{4 \times 63k}{63} = 2^2 \times k \text{ 가 어떤 자연수의 제곱이므로}$$

$$\therefore k = 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \dots$$

이때, x 가 세 자리 자연수이므로

$$k = 4 \text{ 일 때, } x = 63 \times 4 = 252$$

$$k = 9 \text{ 일 때, } x = 63 \times 9 = 567$$

$$\therefore x = 252, 567$$

4. 분수 $\frac{a}{2^2 \times 11}$ 는 유한소수로 나타낼 수 있고 기약분수로 고치면 $\frac{1}{b}$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, $a < 20$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{a}{2^2 \times 11}$ 가 유한소수이고 $a < 20$ 이므로 $a = 11$, $b = 4$

$$\therefore a + b = 15$$

5. 한 자리 자연수 x, y 에 대하여 $f(x, y) = 5(0.\dot{x} - 0.\dot{y}) + 2(0.\dot{x}y\dot{x} + 0.\dot{y}xy\dot{y})$ 라고 정의할 때, $f(x, y) < 0$ 을 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 14 개

해설

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 5\left(\frac{x}{9} - \frac{y}{9}\right) + 2\left(\frac{100x + 10y + x}{999} + \frac{100y + 10x + y}{999}\right) \\ &= \frac{7}{9}x - \frac{1}{3}y \end{aligned}$$

$$f(x, y) < 0 \text{ 이므로 } \frac{7}{9}x - \frac{1}{3}y < 0, y > \frac{7}{3}x$$

x, y 는 모두 한 자리 자연수이어야 하므로

$$\frac{7}{3}x < y \leq 9$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } y = 3, 4, 5, \dots, 9$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } y = 5, 6, \dots, 9$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } y = 8, 9$$

따라서 순서쌍 (x, y) 의 갯수는 $7 + 5 + 2 = 14$ (개) 이다.

6. 3의 배수가 아닌 자연수 x 에 대하여 $f(x)$ 를 $\frac{x}{3}$ 를 소수로 나타낼 때, 순환마디에 있는 각 자리의 숫자를 더한 값으로 정의하자.

이때 $\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(4)}{f(5)} + \frac{f(7)}{f(8)} + \cdots + \frac{f(19)}{f(20)} + \frac{f(22)}{f(23)} + \cdots + \frac{f(88)}{f(89)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots = 0.\dot{3}, \quad f(1) = 3$$

$$\frac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\dot{6}, \quad f(2) = 6$$

$$\frac{4}{3} = 1.33333\ldots = 1.\dot{3}, \quad f(4) = 3$$

$$\frac{5}{3} = 1.66666\ldots = 1.\dot{6}, \quad f(5) = 6 \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(4)}{f(5)} + \frac{f(7)}{f(8)} + \cdots + \frac{f(19)}{f(20)} + \frac{f(22)}{f(23)} + \cdots + \frac{f(88)}{f(89)} \text{ 은}$$

분모가 6이고 분자가 3인 수들의 합이다.

$89 = 3 \times 30 - 1$ 이므로

$$\text{구하는 값은 } \frac{1}{2} \times 30 = 15$$

7. $x \odot y = \begin{cases} x \neq y \text{이면 } -2 \\ x = y \text{ 이면 } 2 \end{cases}$ 라 할 때,

$a = \frac{1}{90}$, $b = 0.1$, $c = \frac{1}{10}$, $d = 0.0\dot{9}$ 에 대하여 $(a \odot b) \odot (c \odot d)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$a = \frac{1}{90}, b = \frac{1}{10}, c = \frac{1}{10}, d = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

$$a \neq b, c = d, (a \odot b) \odot (c \odot d) = -2 \odot 2 = -2$$

8. 서로 다른 한 자리 자연수 a, b 에 대하여 기약분수 $\frac{a}{b \times 111} = c$ 라 할 때, 자연수 $9990c$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$9990c = \frac{a}{b \times 111} \times 9990 = \frac{90a}{b} = \frac{2 \times 3^2 \times 5 \times a}{b}$$

이 때, $\frac{a}{b \times 111}$ 가 기약분수이므로 a, b 는 서로소이고,
 $\frac{2 \times 3^2 \times 5 \times a}{b}$ 가 자연수가 되려면 b 는 2 의 약수이거나 3 의
약수, 5 의 약수 또는 9 의 약수이어야 한다.

따라서 $b = 9$, $a = 1$ 일 때 $\frac{2 \times 3^2 \times 5 \times a}{b}$ 는 최솟값 10 을
가진다.

9. $9^x = 4$ 일 때, $\frac{3^{2x}}{3^{4x} + 3^x}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2}{9}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ $\frac{9}{2}$

해설

$$9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = 4$$

따라서 $3^x = 2$ 이고, $3^{4x} = (3^x)^4 = 2^4 = 16$ 이다.

$$\therefore \frac{3^{2x}}{3^{4x} + 3^x} = \frac{4}{16 + 2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

10. $f(x) = 3^x$ 이라고 할 때, 안에 알맞은 수를 구하여라.

$$f(2) \times f(-3) \div f(5) = f(\text{})$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$$\begin{aligned} f(2) \times f(-3) \div f(5) &= 3^2 \times 3^{-3} \div 3^5 \\ &= 3^{-6} = f(-6) \end{aligned}$$

11. n 이 자연수일 때, $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \cdots + (-1)^{2n-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$(\text{준식}) = (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots + (-1 + 1) - 1 = -1$$

12. $58^{2009} \times 35^{2009}$ 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

58 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 8 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자와 같으므로, 8, 4, 2, 6 이 반복된다.

따라서 58^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 8

35 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 5 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자와 같으므로

35^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 5

$\therefore 58^{2009} \times 35^{2009}$ 의 일의 자리의 숫자는 8×5 의 일의 자리의 숫자인 0이다.

13. 다음을 만족시키는 x 의 값을 구하여라.

$$2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = 112$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} 2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x &= 2^x(2^2 + 2 + 1) \\ &= 2^x \cdot 7 = 112 \end{aligned}$$

$$2^x = 16$$

$$\therefore x = 4$$

14. 밑면의 반지름의 길이가 r 이고, 높이가 h 인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 밑면의 반지름은 20% 늘리고, 높이는 10% 줄이면 부피는 원래 부피보다 몇 % 변화하는지 구하여라.

▶ 답 : %

▷ 정답 : 29.6 %

해설

$$(\text{처음 원기둥의 부피}) = \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$$

(변화된 원뿔의 부피)

$$= \pi \left(\frac{120}{100} \times r \right)^2 \times \left(\frac{90}{100} \times h \right)$$

$$= \frac{12^2}{10^2} \times \frac{9}{10} \times \pi r^2 h$$

$$= \frac{1296}{1000} \times (\pi r^2 h)$$

변화된 원뿔의 부피는 처음 원뿔의 부피의 $\frac{1296}{1000}$ 배이므로 변화된 부피는

$$\left(\frac{1296}{1000} - 1 \right) \times 100 = 29.6(\%) \text{ 이다.}$$

15. $-5y+4x-2$ 에서 어떤 식을 빼어야 할 것을 잘못하여 더했더니 $x-2y+3$ 이 되었다. 어떤 식이 $ax+by+c$ 이고, 바르게 계산한 답이 $dx+ey+f$ 일 때, $af-bd-ce$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c, d, e, f 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

어떤 식을 A 라고 하면

바르게 계산한 식은 $-5y + 4x - 2 - A$

잘못 계산된 식은

$$-5y + 4x - 2 + A = x - 2y + 3$$

$$A = x - 2y + 3 - 4x + 5y + 2$$

$$A = -3x + 3y + 5$$

$$-3x + 3y + 5 = ax + by + c \text{ 이므로}$$

$$a = -3, b = 3, c = 5$$

A 를 바르게 계산한 식에 대입하면

$$-5y + 4x - 2 - A$$

$$= -5y + 4x - 2 - (-3x + 3y + 5)$$

$$= 7x - 8y - 7$$

따라서 바르게 계산한 답이 $7x - 8y - 7 = dx + ey + f$ 이므로

$$d = 7, e = -8, f = -7$$

$$\therefore af - bd - ce = 21 - 21 - (-40) = 40$$

16. $A = x^2 - 3x + 1$, $B = 3x^2 + 5$, $C = -2x^2 + 7x$ 일 때, $3(A+B) - 2C - (A-C)$ 의 x^2 의 계수를 a , x 의 계수를 b , 상수항을 c 라고 하자. $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

$$\begin{aligned} & 3(A+B) - 2C - (A-C) \\ &= 3A + 3B - 2C - A + C \\ &= 2A + 3B - C \\ &= 2(x^2 - 3x + 1) + 3(3x^2 + 5) - (-2x^2 + 7x) \\ &= 13x^2 - 13x + 17 \\ &\therefore a = 13, b = -13, c = 17 \\ &\therefore a + b + c = 17 \end{aligned}$$

17. $\frac{2x^2 + 7x - 15}{x + 5} = mx + n$ 일 때, 정수 m, n 의 값을 구하여라. (단, $x \neq -5$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 2$

▷ 정답 : $n = -3$

해설

$$\frac{2x^2 + 7x - 15}{x + 5} = mx + n$$

양변에 $(x + 5)$ 를 곱하면

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x - 15 &= (mx + n)(x + 5) \\ &= mx^2 + (5m + n)x + 5n \end{aligned}$$

따라서 $m = 2, n = -3$

18. 두 자연수 a, b 에 대하여 $x = a + b, y = a - b$ 이고 $x^2 + y^2 = 10$ 일 때, a, b 의 값을 구하여라.(단, $a > b$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

해설

$x = a + b, y = a - b$ 를 $x^2 + y^2 = 10$ 식에 대입하면

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) = 10$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

따라서 $a^2 = 4, b^2 = 1$ 에서 $a = 2, b = 1$ 이다.

19. $a\%$ 의 설탕물 xg 에 $y g$ 의 물을 더 부어 $b\%$ 의 설탕물이 되었다. y 를 a, b, x 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $y = \frac{ax}{b} - x$

해설

$$\frac{a \times x}{100} = \frac{b \times (x + y)}{100}$$

$$ax = b(x + y)$$

$$x + y = \frac{ax}{b}$$

$$\therefore y = \frac{ax}{b} - x$$

20. 0이 아닌 세 수 x, y, z 에 대하여 $x : y : z = y + z : z + x : x + y$ 일 때,
 $\frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y + z)^3}$ 의 값을 구하여라. (단, $x + y + z \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{3}$

해설

$x : y : z = y + z : z + x : x + y$ 이면

$$\frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} \text{ 이다.}$$

$$\frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z}$$

의 세 변에 각각 1 씩 더하면

$$\frac{y+z}{x} + 1 = \frac{z+x}{y} + 1 = \frac{x+y}{z} + 1$$

$$\frac{x+y+z}{x} = \frac{x+y+z}{y} = \frac{x+y+z}{z}$$

x, y, z 는 0 이 아니므로 $x + y + z \neq 0$

따라서 $x = y = z$

$$\therefore \frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y + z)^3} = \frac{3x^2 \times 3x}{27x^3} = \frac{1}{3}$$