

1. $\frac{9 \times 6^n}{4}$ 의 약수의 개수가 77 개일 때, 자연수 n 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

주어진 식을 소인수분해하여 간단히 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{9 \times 6^n}{4} &= \frac{3^2 \times (2 \times 3)^n}{2^2} \\ &= 2^{-2} \times 2^n \times 3^2 \times 3^n \\ &= 2^{n-2} \times 3^{n+2}\end{aligned}$$

따라서 약수의 개수는

$$(n-2+1)(n+2+1) = (n-1)(n+3) = 77 \text{ 이므로}$$

$$n-1 = 7, n+3 = 11$$

$$\therefore n = 8$$

2. 자연수 n 에 대하여 $30^n = x$ 일 때, $(2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n$ 을 x 에 관한 가장 간단한 식으로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답: $30x$

해설

$$\begin{aligned} & (2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n \\ &= (2^n 3^n + 2^n 2^1 3^n + 2^n 3^n 3^2 + 2^n 2^1 3^n 3^2) \times 5^n \\ &= (2^n 3^n 5^n) + 2 \times (2^n 3^n 5^n) + 9 \times (2^n 3^n 5^n) \\ &\quad + 18 \times (2^n 3^n 5^n) \end{aligned}$$

$$2^n 3^n 5^n = 30^n = x \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \therefore (2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n \\ = x + 2x + 9x + 18x = 30x \end{aligned}$$

3. 분모가 12 이고 두 분수 $\frac{1}{4}$ 과 $\frac{5}{6}$ 사이에 있는 분수 중 유한소수를 모두 구하여라. (단, 분자는 자연수이다.)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{6}{12}$

▷ 정답: $\frac{9}{12}$

해설

$\frac{3}{12} < \frac{\square}{12} < \frac{10}{12}$ 이므로 3 과 10 사이의 자연수 중 3 의 배수인 6, 9 이다.

따라서 유한소수가 되는 분수는 $\frac{6}{12}, \frac{9}{12}$ 이다.

4. $\frac{a}{2^3 \times 7}$ 를 약분하면 $\frac{1}{b}$ 이 되고, 이것을 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 이때, 정수 a, b 의 값을 구하여라.(단, $10 < a < 15$)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 14$

▷ 정답: $b = 4$

해설

$\frac{a}{2^3 \times 7}$ 가 유한소수가 되어야 하므로 a 는 7의 배수이어야 한다.

따라서 $a = 14$ 이고, $\frac{14}{56} = \frac{1}{4}$ 이 되므로 $b = 4$ 이다.

5. 4 개의 숫자 1, 2, 3, 4 를 한 번씩 사용하여 $\frac{abcd}{9999}$ 를 만든다고 한다.
만들 수 있는 모든 수를 각각 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 둘째 자리 숫자의 총합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 60

해설

$$\frac{abcd}{9999} = 0.\dot{a}bcd \text{ 에서}$$

소수점 아래 둘째 자리의 숫자 b 가 1 일 경우
나머지 a, c, d 의 자리에 1 을 제외한 3 개의 수(2, 3, 4) 를
일렬로 배열한 것만큼 1 이 있다.

$$\therefore 3 \times 2 \times 1 = 6(\text{가지})$$

b 의 자리에 2, 3, 4 일 경우도 마찬가지로 각각 6 가지씩 있으므로

$$\text{총 } (1 + 2 + 3 + 4) \times 6 = 60 \text{ 이다.}$$

따라서 소수점 아래 둘째 자리 숫자의 총합은 60 이다.

6. 분수 $\frac{2}{7}$ 를 x 라 할 때, $x \times (10^6 - 1)$ 의 값은 몇 자리 정수인지 구하여라.

▶ 답: 자리

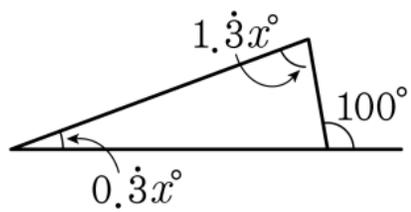
▷ 정답: 6 자리

해설

$$\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4} = \frac{285714}{999999}$$

$$x \times (10^6 - 1) = \frac{285714}{999999} \times 999999 = 285714$$

7. 다음 삼각형에서 x 의 값은?



① 50

② 60

③ 70

④ 80

⑤ 90

해설

삼각형의 두 내각의 합과 이웃하지 않는 한 외각의 크기는 같으므로 $0.3x^\circ + 1.3x^\circ = 100^\circ$ 가 된다.

$$0.3x + 1.3x = \frac{3}{9}x^\circ + \frac{12}{9}x = 100^\circ$$

$$\frac{15}{9}x^\circ = 100, 15x^\circ = 900^\circ$$

$$\therefore x = 60$$

8. $0.3\dot{4} - 0.\dot{1} = \frac{7}{a}$, $3.0\dot{5} \times 0.4\dot{5} = \frac{25}{b}$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 를 순환소수로 나타낸 것은?

① $1.\dot{2}$

② $1.\dot{3}$

③ $1.\dot{4}$

④ $1.\dot{5}$

⑤ $1.\dot{6}$

해설

$$\begin{aligned} 0.3\dot{4} - 0.\dot{1} &= \frac{34 - 3}{90} - \frac{1}{9} = \frac{31}{90} - \frac{10}{90} \\ &= \frac{21}{90} = \frac{7}{30} \quad \therefore a = 30 \end{aligned}$$

$$3.0\dot{5} \times 0.4\dot{5} = \frac{275}{90} \times \frac{45}{99} = \frac{25}{18} \quad \therefore b = 18$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{30}{18} = \frac{15}{9} = 1.\dot{6}$$

9. $3^x \times 27 = 81^3$ 을 만족하는 x 의 값은?

① 3

② 4

③ 6

④ 9

⑤ 12

해설

$$3^x \times 27 = 3^x \times 3^3 = 3^{x+3} = (3^4)^3 = 3^{12} = 81^3$$

$$3^{x+3} = 3^{12} \text{ 에서 } x+3 = 12$$

$$\therefore x = 9$$

10. $\frac{27^n}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{27^n}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \text{ 에서 } 27^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \times 9,$$

$$3^{3n} = (3^{-1})^{-4} \times 3^2 = 3^4 \times 3^2 = 3^6$$

$$\therefore 3n = 6, n = 2$$

11. $(a^3)^x \div (a^2)^3 \div (a^x)^2 = \frac{1}{a}$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$a^{3x} \div a^6 \div a^{2x} = a^{-1}$$

$$3x - 6 - 2x = -1$$

$$\therefore x = 5$$

12. $\left(\frac{16^4 + 4^{11}}{8^4 + 4^9}\right)^2$ 의 값을 2 의 거듭제곱으로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답: 2^8

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{16^4 + 4^{11}}{8^4 + 4^9}\right)^2 &= \left(\frac{(2^4)^4 + (2^2)^{11}}{(2^3)^4 + (2^2)^9}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2^{16} + 2^{22}}{2^{12} + 2^{18}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2^{16}(1 + 2^6)}{2^{12}(1 + 2^6)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2^{16}}{2^{12}}\right)^2 \\ &= (2^4)^2 = 2^8\end{aligned}$$

13. 자연수 a 에 대하여 $1^a + 2^a + 3^a$ 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(a)$ 라 할 때, $f(10) + f(14)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

1^a 의 일의 자리의 숫자는 1, 1, 1, 1...

2^a 의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6, 2, 4...

3^a 의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1, 3, 9...

따라서, $1^a + 2^a + 3^a$ 의 일의 자리의 숫자는 6, 4, 6, 8... 이 반복된다.

즉, $f(n) = f(n + 4)$ 이므로 $f(10) = f(14)$ 이고

$f(10)$ 의 일의 자리의 숫자는 $10 = 4 \times 2 + 2$ 이므로 4 이다.

$\therefore f(10) + f(14) = 4 + 4 = 8$

14. $81^{2x-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{7}{5}$

해설

$$(3^4)^{2x-4} = (3^{-2})^{x+1}$$

$$8x - 16 = -2x - 2$$

$$10x = 14$$

$$\therefore x = \frac{7}{5}$$

15. 두 순서쌍 (a, b) , (c, d) 에 대하여 $(a, b)(c, d) = ac + ad + bc + bd$ 로 정의한다. $(px, y)(qy, 3x) = -3x^2 + xy + 2y^2$ 일 때, 상수 p, q 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $p = -1$

▷ 정답: $q = 2$

해설

$$\begin{aligned}(px, y)(qy, 3x) &= pqxy + 3px^2 + qy^2 + 3xy \\ &= 3px^2 + (3 + pq)xy + qy^2\end{aligned}$$

따라서 $3px^2 + (3 + pq)xy + qy^2 = -3x^2 + xy + 2y^2$ 이므로
 $\therefore p = -1, q = 2$

16. 네 개의 수 a, b, c, d 에 대하여 기호 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 와 같이

정의할 때, $\begin{vmatrix} x+2y & x-y \\ 3(x-2y) & 2y-x \end{vmatrix} = 2Ax^2 - 3Bxy + 2Cy^2$ 을 만족하는

A, B, C 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $A = -2$

▷ 정답 : $B = -3$

▷ 정답 : $C = -1$

해설

$\begin{vmatrix} x+2y & x-y \\ 3(x-2y) & 2y-x \end{vmatrix}$ 을 정의대로 계산하면

$$\begin{aligned} & (x+2y)(2y-x) - (x-y)(3x-6y) \\ &= 2xy - x^2 + 4y^2 - 2xy - 3x^2 + 6xy + 3xy - 6y^2 \\ &= -4x^2 + 9xy - 2y^2 \end{aligned}$$

$$2Ax^2 - 3Bxy + 2Cy^2 = -4x^2 + 9xy - 2y^2 \text{ 이므로}$$

$$2A = -4 \text{ 에서 } A = -2$$

$$-3B = 9 \text{ 에서 } B = -3$$

$$2C = -2 \text{ 에서 } C = -1$$

17. $A = 3^a$ 일 때, $B(A) = a + 1$ 이라고 정의하자. 자연수 n 에 대하여 $B\left(\frac{9 \times 81^4 - 9 \times 243^3}{6 \times 243^3}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$81 = 3^4$, $243 = 3^5$ 이고 주어진 식을 분배법칙을 이용하여
공통인수로 묶으면

$$\begin{aligned}\frac{9 \times 81^4 - 9 \times 243^3}{6 \times 243^3} &= \frac{9\{(3^4)^4 - (3^5)^3\}}{(2 \times 3) \times (3^5)^3} \\ &= \frac{3(3^{16} - 3^{15})}{3(3^{16} - 3^{15})} \\ &= \frac{2 \times 3^{15}}{3(2 \times 3^{15})} \\ &= \frac{2 \times 3^{15}}{2 \times 3^{15}} = 3\end{aligned}$$

$$(\because 3^{16} - 3^{15} = 3 \times 3^{15} - 3^{15} = 2 \times 3^{15})$$

$$\therefore B\left(\frac{9 \times 81^4 - 9 \times 243^3}{6 \times 243^3}\right) = B(3) = 1 + 1 = 2$$

18. $\frac{x^2 - 4x + 3}{-x + 1} = 0$ 일 때, x 의 값을 구하여라. (단, $x \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{x(x-1) - 3x + 3}{-x+1} = 0$$

$$\frac{-x(-x+1) + 3(-x+1)}{-x+1} = 0$$

$$-x + 3 = 0$$

$$\therefore x = 3$$

19. $A = x - 3y$, $B = -3x + 2y$ 일 때, $5A - [B - \{3A - (A - 2B)\}]$ 을 x , y 에 관한 식으로 나타내면?

① $4x + 19y$

② $4x - 19y$

③ $6x + 11y$

④ $6x - 11y$

⑤ $3x - y$

해설

$$5A - [B - \{3A - (A - 2B)\}] = 7A + B$$

$A = x - 3y$, $B = -3x + 2y$ 을 대입하면

$$7A + B = 7(x - 3y) + (-3x + 2y) = 7x - 21y - 3x + 2y = 4x - 19y$$

20. 0 이 아닌 세 수 x, y, z 에 대하여 $yz = \frac{1}{x}$ 일 때, $\frac{x}{1+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{1+z+zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$yz = \frac{1}{x}$ 에서 $xyz = 1$ 을 주어진 식에 대입하여 분모를 $1+y+yz$

로 통일하면

$$\begin{aligned} & \frac{x}{xyz+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{xyz+z+zx} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{1}{1+x+xy} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{xyz}{xyz+x+xy} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{yz}{1+y+yz} \\ &= \frac{1+y+yz}{1+y+yz} = 1 \end{aligned}$$

21. $7x + 5 \geq 9x \square 3$ 의 부등식이 있다. 미혜는 빈칸의 부호를 잘 못 봐서 $x \leq 4$ 로 답을 구했다고 한다. 올바르게 보았다고 할 때 조건을 만족하는 자연수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$7x - 9x \geq \square 3 - 5 \quad \text{이므로}$$

$$-2x \geq \square 3 - 5$$

$$x \leq -\frac{1}{2}(\square 3 - 5) = 4$$

미혜는 빈칸의 부호를 -로 잘못보았다.

원래의 부호는 +이다.

$$7x + 5 \geq 9x + 3 \quad \text{이 되므로}$$

$$7x - 9x \geq 3 - 5$$

$$-2x \geq -2$$

$$x \leq 1$$

조건을 만족하는 자연수는 1이다.

그러므로 자연수의 합은 1이다.

23. $2^{3-a} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$ 일 때, $ax - \frac{3}{4} \geq 4x + b$ 의 해는 $x \geq \frac{1}{2}$ 이다. 이 때, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $b = \frac{1}{4}$

해설

$$2^{3-a} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

$$3 - a = -3, a = 6$$

$$6x - \frac{3}{4} \geq 4x + b$$

$$24x - 3 \geq 16x + 4b$$

$$8x \geq 4b + 3$$

$$x \geq \frac{4b + 3}{8}$$

$$\frac{4b + 3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$8b + 6 = 8, b = \frac{1}{4}$$

24. 부등식 $(a-b)x - 2a > 4b$ 의 해가 $x < -10$ 일 때, 부등식 $(2a+3b)x + a - 5b < 0$ 을 풀어라.

▶ 답:

▶ 정답: $x < \frac{9}{8}$

해설

$$(a-b)x > 2a + 4b$$

$$x < \frac{2a+4b}{a-b} = -10(a-b < 0)$$

$$2a + 4b = -10a + 10b$$

$$12a = 6b, 2a = b$$

$$a-b < 0 \text{ 에서 } -a < 0 \quad \therefore a > 0$$

$$(2a+6a)x < -a + 5 \times 2a$$

$$8ax < 9a$$

$$\therefore x < \frac{9}{8}$$