

1. $\frac{2^{-11} + 2^{-12} + \dots + 2^{-20}}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{1024}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2^{-11} + 2^{-12} + \dots + 2^{-20}}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}} \\ &= \frac{2^{-10}(2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10})}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}} \\ &= 2^{-10} = \frac{1}{1024} \end{aligned}$$

2. 100 이하의 자연수 x 에 대하여 $\frac{x}{90}$ 은 유한소수이고, $\frac{x}{90} - \left[\frac{x}{90} \right] \neq 0$ 이다. 이것을 만족하는 x 의 개수를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

▶ 답: 개

▷ 정답: 10 개

해설

$\frac{x}{90} - \left[\frac{x}{90} \right] = 0$ 가 되는 x 의 값은 90 이므로

$\frac{x}{90}$ 가 정수가 아닌 유한소수가 되려면 x 는 90 이 아닌 9 의 배수이어야 한다.

따라서 x 는 90 을 제외한 100 이하의 9 의 배수, 따라서 10 개 이다.

3. 자연수 x 에 대하여 $\frac{7x}{60}$ 은 유향소수이고, $7x \leq 100$ 이다. 이것을 만족하는 x 들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$\frac{7x}{60} = \frac{7x}{2^2 \times 3 \times 5}$ 이므로 x 는 3 의 배수이어야 한다.

분자인 $7x$ 는 100 이하의 자연수이므로
조건에 맞는 x 값은 3, 6, 9, 12 이다.

따라서 x 값들의 합은 30 이다.

4. 분수 $\frac{a}{2^2 \times 3^2 \times 5}$ 를 소수로 고치면 유한소수이고, 기약분수로 고치면 $\frac{1}{b}$ 이다. 이때, $a - b$ 의 값은? (단, $2 < a < 10$)

- ① -11 ② -9 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$\frac{a}{2^2 \times 3^2 \times 5}$ 가 유한소수가 되어야 하므로, a 의 값은 9가 된다.

이것을 기약분수로 고치면, $\frac{1}{2^2 \times 5}$ 이므로, b 의 값은 20이 된다.

$$\therefore a - b = 9 - 20 = -11$$

5. $x = \frac{5}{6}$ 일 때, $x + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ 의 값을 순환소수로 나타내려고 한다. 이때,

순환마디의 각 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} &= x + \frac{1}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} \\ &= x + \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \\ &= x + \frac{x}{x+1}\end{aligned}$$

x 의 값을 대입하면

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{\frac{11}{5}} = \frac{5}{6} + \frac{5}{11} = \frac{85}{66} = 1.2878787 \dots$$

따라서 순환마디는 87이므로
각 수의 합은 $8 + 7 = 15$ 이다.

6. $2.\dot{0}0\dot{9} - 2.0\dot{0}\dot{9}$ 를 계산한 값의 소수점 아래 2009 번째 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

순환소수를 풀어서 계산하면

$$\begin{aligned} 2.\dot{0}0\dot{9} - 2.0\dot{0}\dot{9} &= \frac{2007}{999} - \frac{1989}{990} \\ &= \frac{-81}{990 \times 999} \\ &= -0.\dot{0}00081\dot{9} \end{aligned}$$

소수점 아래의 2009 번째 숫자는 순환마디의 2008 번째 숫자와 같다.

이때, $2008 = 6 \times 334 + 4$ 이므로 구하는 숫자는 순환마디의 4 번째 숫자 8 이다.

7. $0.\dot{2}\dot{1} = a$ 라 할 때, $(99.\dot{9} - 1) \times a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$0.\dot{2}\dot{1} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33} \quad \therefore a = \frac{7}{33}$$

$$(99.\dot{9} - 1) \times a = (100 - 1) \times \frac{7}{33} = 99 \times \frac{7}{33} = 21$$

8. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 무한소수는 유리수이다.
- ㉡ 모든 정수는 순환소수로 나타낼 수 없다.
- ㉢ 무한소수 중에서 순환하지 않는 소수는 무리수이다.
- ㉣ 유한소수가 아닌 소수는 순환소수이다.
- ㉤ 유한소수로 나타낼 수 없는 분수는 순환소수로 나타낼 수 있다.
- ㉥ 기약분수를 소수로 고치면 모두 유한소수가 된다.

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉡, ㉢, ㉤

③ ㉢, ㉤

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ 무한소수중 순환소수는 유리수이고, 순환하지 않는 무한소수는 무리수이다.

㉡ $1 = \frac{9}{9} = 0.\dot{9}$ 이므로 정수를 순환소수로 나타낼 수 있다.

㉣ 소수에는 유한소수와 무한소수가 있고, 무한소수에 순환소수와 순환하지 않는 무한소수가 있다.

㉤ 기약분수를 소수로 고치면, 유한소수나 순환소수가 된다.

9. $2^{2x} \times 8^x = 4^2 \times 2^x$ 를 만족하는 x 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ 1

④ 3

⑤ 4

해설

$$2^{2x} \times 2^{3x} = (2^2)^2 \times 2^x$$

$$2^{5x} = 2^{x+4}$$

$$\therefore x = 1$$

10. 다음 중 가장 작은 수는?

① 2^{20}

② 3^{15}

③ 4^{10}

④ 5^5

⑤ 6^5

해설

① $2^{20} = (2^4)^5$

② $3^{15} = (3^3)^5$

③ $4^{10} = 2^{20} = (2^4)^5$

따라서 가장 큰 작은 수는 ④이다.

11. $243^5 \div 81^n = 27^3$ 일 때, n 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(3^5)^5 \div 3^{4n} = 3^{25-4n} = 3^9$$

$$25 - 4n = 9$$

$$\therefore n = 4$$

12. $(x^a y^b z^c)^n = x^{28} y^{42} z^{70}$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 최대일 때, $a + 2b - c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 28 \ 42 \ 70} \\ 7 \overline{) 14 \ 21 \ 35} \\ \hline 2 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

28, 42, 70 의 최대공약수가 14 이므로 $n = 14$ 이다.

$$x^{28} y^{42} z^{70} = (x^a y^b z^c)^{14}$$

$$a = 2, b = 3, c = 5$$

$$\therefore a + 2b - c = 2 + 6 - 5 = 3$$

13. $\frac{2^{(5x-y)}}{4^{(x+2y)}} = \frac{1}{2}$, $\frac{3^{(7x+y)}}{27^{(x+2y)}} = 9$ 를 만족하는 x, y 에 대하여 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\frac{2^{(5x-y)}}{2^{2(x+2y)}} = \frac{1}{2}, \frac{3^{(7x+y)}}{3^{3(x+2y)}} = 3^2$$

$$5x - y - 2x - 4y = -1$$

$$3x - 5y = -1 \dots \textcircled{㉠}$$

$$7x + y - 3x - 6y = 2$$

$$4x - 5y = 2 \dots \textcircled{㉡}$$

㉡ - ㉠ 을 하면

$$x = 3, y = 2$$

$$\therefore xy = 3 \times 2 = 6$$

14. $2^{60}, 3^{40}, 4^{30}, 5^{24}$ 중 가장 큰 수를 M , 가장 작은 수를 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값의 일의 자리 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2^{60}, 3^{40}, 4^{30}$ 에서 세 지수의 최대공약수가 10 이므로

$$2^{60} = (2^6)^{10} = 64^{10}, \quad 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}, \quad 4^{30} = (4^3)^{10} = 64^{10}$$

$$2^{60} = 4^{30} < 3^{40}$$

$2^{60}, 5^{24}$ 에서 두 지수의 최대공약수가 12 이므로

$$2^{60} = (2^5)^{12} = 32^{12}, \quad 5^{24} = (5^2)^{12} = 25^{12}$$

$$25^{12} < 2^{60} = 4^{30} < 3^{40}$$

따라서 3^n 의 일의 자리 숫자는 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ 일 때, 3, 9, 7, 1 을 반복하므로

3^{40} 의 일의 자리 숫자는 1

5^n 의 일의 자리 숫자는 n 의 값에 상관없이 항상 5 이다.

5^{24} 의 일의 자리 숫자는 5

따라서 $M \times m$ 의 값의 일의 자리 숫자는 5 이다.

15. $\frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} = 3$ 일 때, $\frac{4a - 6ab - 4b}{-3a - 8ab + 3b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$$\frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} = 3, \frac{b-a}{2ab} = 3, b-a = 6ab,$$

$$\frac{4a - 6ab - 4b}{-3a - 8ab + 3b} = \frac{-4(b-a) - 6ab}{3(b-a) - 8ab} \text{ 에 } b-a = 6ab \text{ 를 대입하면,}$$

$$\frac{-4(6ab) - 6ab}{3(6ab) - 8ab} = \frac{-30ab}{10ab} = -3$$

16. $x : y = 3 : 4$ 일 때, $\frac{5x^2}{2x^2 + 3y^2} - \frac{y^2}{3x^2 - y^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{17}{22}$

해설

$$x : y = 3 : 4$$

$$3y = 4x$$

$$y = \frac{4}{3}x$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{5x^2}{2x^2 + 3 \times \frac{16}{9}x^2} - \frac{\frac{16}{9}x^2}{3x^2 - \frac{16}{9}x^2} \\ &= \frac{5x^2}{\frac{22}{3}x^2} - \frac{\frac{16}{9}x^2}{\frac{11}{9}x^2} \\ &= \frac{15}{22} - \frac{16}{11} \\ &= -\frac{17}{22}\end{aligned}$$

17. $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = 1$ 일 때, $xyz^2 + yz$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = 1 \text{ 에서}$$

$$y + \frac{1}{z} = 1, \frac{yz + 1}{z} = 1, yz + 1 = z$$

$$\text{따라서 } yz = z - 1$$

$$\text{마찬가지 방법으로 } xy = y - 1$$

따라서 주어진 식에 $xy = y - 1$, $yz = z - 1$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} xyz^2 + yz &= (y - 1)z^2 + yz \\ &= yz^2 - z^2 + yz \\ &= yz(z + 1) - z^2 \\ &= (z - 1)(z + 1) - z^2 \\ &= z^2 - 1 - z^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

18. $\frac{1}{(x-y)} = \frac{z}{y^2-x^2}$ 일 때, $\frac{yz+zx}{xy} + \frac{zx+xy}{yz} + \frac{xy+yz}{zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$\frac{1}{(x-y)} = \frac{z}{y^2-x^2} \text{ 의 양변에 } x-y \text{ 를 곱하면}$$

$$1 = \frac{z}{-(x-y)(x+y)} \times (x-y) = \frac{z}{-(x+y)}$$

$$\therefore x+y+z=0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{yz+zx}{xy} + \frac{zx+xy}{yz} + \frac{xy+yz}{zx}$$

$$= \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)$$

$$= \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \text{ (}\textcircled{1}\text{을 대입)}$$

$$= \frac{-x}{x} + \frac{-y}{y} + \frac{-z}{z} = -1 - 1 - 1 = -3$$

19. $a + b + c = 1$ 일 때, $\frac{b+c}{(1-a)^2} + \frac{a+c}{(1-b)^2} + \frac{a+b}{(1-c)^2} - \frac{ab+ac}{(1-a)^2} - \frac{ab+bc}{(1-b)^2} - \frac{ac+bc}{(1-c)^2}$ 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & \frac{b+c}{(1-a)^2} + \frac{a+c}{(1-b)^2} + \frac{a+b}{(1-c)^2} \\ & - \frac{ab+ac}{(1-a)^2} - \frac{ab+bc}{(1-b)^2} - \frac{ac+bc}{(1-c)^2} \\ & = \frac{b+c-a(b+c)}{(1-a)^2} + \frac{a+c-b(a+c)}{(1-b)^2} + \frac{a+b-c(a+b)}{(1-c)^2} \\ & = \frac{(b+c)(1-a)}{(1-a)^2} + \frac{(a+c)(1-b)}{(1-b)^2} + \frac{(a+b)(1-c)}{(1-c)^2} \\ & = \frac{b+c}{1-a} + \frac{a+c}{1-b} + \frac{a+b}{1-c} \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$a+b+c=1$ 이므로

$b+c=1-a, a+c=1-b, a+b=1-c$ 이고, 이 식들을 식

㉠에 대입하면,

$$\begin{aligned} & \frac{b+c}{1-a} + \frac{a+c}{1-b} + \frac{a+b}{1-c} \\ & = \frac{1-a}{1-a} + \frac{1-b}{1-b} + \frac{1-c}{1-c} \\ & = 1+1+1=3 \end{aligned}$$

20. 0 이 아닌 세 자연수 x, y, z 에 대하여 $xy : yz : zx = z : x : y$ 일 때,
 $\frac{(x + y + z)^3}{xyz}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$xy : yz : zx = z : x : y$ 이므로,

$$\frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} \text{ 이다.}$$

$$\frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} \text{ 에서 } x^2y = yz^2, x^2 = z^2$$

x 와 z 는 자연수이므로 $x = z$

$$\frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} \text{ 에서 } y^2z = x^2z, x^2 = y^2$$

x 와 y 는 자연수이므로 $x = y$

$$\therefore x = y = z$$

$$\frac{(x + y + z)^3}{xyz} = \frac{(3x)^3}{x^3} = \frac{27x^3}{x^3} = 27$$

21. $-1 < \frac{3x}{4} < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$ 일 때, $6x - 5y$ 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-33 < 6x - 5y < -6$

해설

$$-1 < \frac{3x}{4} < \frac{1}{2} \text{ 에서}$$

$$-\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3}, -8 < 6x < 4 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \text{ 에서}$$

$$2 < y \leq 5, -25 \leq -5y < -10 \cdots \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{\Gamma} + \textcircled{\text{L}} \text{ 을 하면 } -33 < 6x - 5y < -6$$

22. 집합 $A = \{(x, y) | 4x + 9y \leq 50, x, y \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 $n(A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$4x + 9y \leq 50$ 이므로

$y = 1, 2, 3, 4, 5$ 만 가능하다.

$y = 1$ 일 때, $4x \leq 41$

$\therefore x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

$y = 2$ 일 때, $4x \leq 32$

$\therefore x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$y = 3$ 일 때, $4x \leq 23$

$\therefore x = 1, 2, 3, 4, 5$

$y = 4$ 일 때, $4x \leq 14$

$\therefore x = 1, 2, 3$

$y = 5$ 일 때, $4x \leq 5$

$\therefore x = 1$

$n(A) = 10 + 8 + 5 + 3 + 1 = 27$

23. a, b, c 는 연속하는 3 개의 3 의 배수이다. $\frac{66}{b} \leq a - c \leq \frac{84}{b}$ 일 때,
 $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -36

해설

a, b, c 가 연속하는 3 의 배수이므로 $b - 3, b, b + 3$ 으로 놓을 수 있다.

$$\frac{66}{b} \leq a - c \leq \frac{84}{b}$$

$$\frac{66}{b} \leq (b - 3) - (b + 3) \leq \frac{84}{b}$$

$$\frac{66}{b} \leq -6 \leq \frac{84}{b} \text{ 이므로}$$

$$\frac{66}{b} \leq -6, \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{11}$$

$$-6 \leq \frac{84}{b}, \frac{1}{b} \geq -\frac{1}{14}$$

$$\therefore -\frac{1}{14} \leq \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{11}, b = -12$$

따라서 $a = -15, c = -9$ 이므로

$$a + b + c = -15 - 12 - 9 = -36 \text{ 이다.}$$

24. $\frac{3^{1-a}}{2} = \frac{1}{54}$ 일 때, $ax - 3(x + 2) < b$ 의 해는 $x < 11$ 이다. 이때, ab 의 값은?

① -5

② 5

③ 10

④ 15

⑤ 20

해설

$$\frac{3^{1-a}}{2} = \frac{1}{54}, 3^{1-a} = \frac{1}{27} \therefore a = 4$$

$$4x - 3(x + 2) < b$$

$$x < b + 6 = 11$$

$$b = 5 \therefore ab = 20$$

25. x 에 관한 일차부등식 $-5x \geq b - 3ax$ 의 해가 $x \geq -\frac{1}{3}$ 일 때, $2a + 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{10}{3}$

해설

$(-5 + 3a)x \geq b$ 의 해가 $x \geq -\frac{1}{3}$ 로 부등호 방향이 바뀌지 않았

으므로

$$-5 + 3a > 0$$

$$\therefore a > \frac{5}{3}$$

부등식의 양변을 $-5 + 3a$ 로 나누면

$x \geq \frac{b}{-5 + 3a}$ 이고, 이 해가 $x \geq -\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{b}{-5 + 3a} = -\frac{1}{3}$$

$$-3b = 3a - 5, 3a + 3b = 5 \text{ 이므로 } a + b = \frac{5}{3}$$

$$\therefore 2a + 2b = \frac{10}{3}$$