1. $\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ $-\dfrac{i}{2}$ ④ $\dfrac{1-i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+i}{2}$

해설

$\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4} = \dfrac{1+(-i)+(-1)}{1+(-1)+1} = \dfrac{-i}{1} = -i$

2. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$이 허근을 가질 때, 실수 m의 범위를 구하면?

① $m < 1$ ② $-1 < m < 1$
③ $m < -1$ 또는 $m > 1$ ④ $m > 1$
⑤ $m > -1$

해설
주어진 이차방정식이 허근을 가지려면
$D/4 = 1 - m < 0$
$\therefore m > 1$

3. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

두근의 합 : 3, 두근의 곱 : 1

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= 7$

4. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를
$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면
$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$
$3+(a-6)i = (b-2)-ai$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3 = b-2$, $a-6 = -a$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$b=5,\ a=3$
$\therefore\ a+b=8$

5. $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\dfrac{6}{5}$　② 2　③ $\dfrac{8}{5}$　④ $\dfrac{8}{3}$　⑤ 3

해설

$$\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

6. 이차방정식 $x^2 + 2(k - a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{D}{4} = (k - a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

7. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$ 에 대하여 y 가 최소가 되도록 하는 x 의 값과 그 때의 y 의 값으로 옳은 것은?

① $x = k,\ y = k^2 + k + 2$
② $x = k,\ y = k^2 - 3k + 4$
③ $x = 2k,\ y = k^2 + 4k + 1$
④ $x = 2k,\ y = k^2 - 5k + 7$
⑤ $x = 3k,\ y = 2k^2 - 3k + 6$

해설

$y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$
$= (x - 2k)^2 + k^2 - 5k + 7$ 이므로
주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때
최솟값 $k^2 - 5k + 7$ 을 갖는다.
따라서, 구하는 x, y 의 값은
$x = 2k,\ y = k^2 - 5k + 7$

8. $x = 0$ 일 때, 최댓값 -1 을 갖고 한 점 $(2,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -2(x+1)^2 - 4$　　② $y = (x-2)^2 - 3$

③ $y = -2(x-1)^2 + 3$　　④ $y = -(x+1)^2 + 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

해설

꼭짓점이 $(0,\ -1)$ 이므로 $y = ax^2 - 1$

$(2,\ -3)$ 을 대입하면 $-3 = 4a - 1$

$a = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

9. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 직선 $y = 0$과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 x축 $(y = 0)$과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D = a^2 - 12 > 0$에서
$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

10. 두 곡선 $y = x^2$과 $y = -x^2 + 2x - 5$에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y절편의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$으로 놓으면
$y' = 2x$이므로 $y'_{x=t} = 2t$는 접선의 기울기이다.
따라서 접선의 방정식은
$y - t^2 = 2t(x - t) \cdots$ ㉠
㉠이 곡선 $y = -x^2 + 2x - 5$에도 접하므로
$2tx - t^2 = -x^2 + 2x - 5$ 에서
$x^2 + 2(t-1)x + (5 - t^2) = 0 \cdots$ ㉡
㉡의 판별식 $\frac{D}{4} = 0$이므로
$(t-1)^2 - (5 - t^2) = 0$에서
$(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore\ t = -1,\ 2$
㉠에서
$t = -1$일 때, $y = -2x - 1$
$t = 2$일 때, $y = 4x - 4$
따라서 두 y절편의 곱은 $(-1) \cdot (-4) = 4$

11. $a-1 \le x \le a+4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 최댓값이 4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + 4 = (x-a)^2 - a^2 + 4$
이때, 꼭짓점의 x 좌표 a 가 x의 값의 범위에 속하므로
$x = a$ 일 때 최솟값, $x = a+4$ 일 때 최댓값을 갖는다.
즉, $f(a+4) = (a+4)^2 - 2a(a+4) + 4 = 4$
$a^2 + 8a + 16 - 2a^2 - 8a + 4 = 4$
$a^2 = 16$
$\therefore a = 4 \ (a > 0)$

12. 합이 16 인 두 수가 있다. 이 두수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 50 ② 62 ③ 64 ④ 79 ⑤ 83

해설

두 수를 각각x, $16-x$ 라고 하면

$y = x(16-x)$

$= -x^2 + 16x$

$= -(x^2 - 16x + 64 - 64)$

$= -(x-8)^2 + 64$

$x = 8$ 일 때, 최댓값 64 을 갖는다.

13. 지면으로부터 초속 20m 로 위로 던진 공의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답: ______ m

▷ 정답: 20 m

해설

$y = -5x^2 + 20x$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 20$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 20m 이다.

14. x에 대한 삼차방정식 $x^3 + (1-2a)x^2 + a(a-2)x + a^2 = 0$의 근이 오직 하나 뿐일 때, 실수 a의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$f(x) = x^3 + (1-2a)x^2 + a(a-2)x + a^2$으로 놓으면
$f(a) = a^3 + (1-2a) \cdot a^2 + a(a-2) \cdot a + a^2 = 0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면
$(x-a)^2(x+1) = 0$
주어진 방정식의 근이 오직 하나뿐이므로 $x = -1$을 삼중근으로 갖는다.
$\therefore\ a = -1$

15. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15　② 16　③ -16　④ 17　⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$
$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로
$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

16. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$　　ㄴ $\omega^2 = 1$

ㄷ $\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 2$　　ㄹ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

ㅁ $\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㄱ, ㄷ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ, ㄹ
④ ㄷ, ㄹ, ㅁ　⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

해설

$x^3 - 1 = 0,$
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$
$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$
$\omega^2 = -1 - \omega \cdots$ ㄱ, ㄴ
$\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$
$= (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots$ ㄷ
$\omega^{1005} + \omega^{1004}$
$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$
$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots$ ㄹ
$\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$
$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots$ ㅁ

17. 두 다항식 $f(x)=x^3-5, g(x)=x^3+3x+1$에 대하여 $f(x)=0$의 세 근을 α,β,γ라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값은?

① 350　② 351　③ 352　④ 353　⑤ 354

해설

$f(x)=0$의 세 근이 α,β,γ 라고 하면 $\alpha^3=5,\beta^3=5,\gamma^3=5$ 이다.

$g(\alpha)=\alpha^3+3\alpha+1=3\alpha+6$, $g(\beta)=\beta^3+3\beta+1=3\beta+6$, $g(\gamma)=\gamma^3+3\gamma+1=3\gamma+6$ $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$

$=(3\alpha+6)(3\beta+6)(3\gamma+6)=351$ ($\because \alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=5$)

18. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

(가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다. (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=1680$

② (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=3360$

③ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

④ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=3360$

⑤ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

해설

시속 30 km ⇒ 분속 500 m

(가) $\frac{x}{60}+3+\frac{y}{500}=10$, $\frac{x}{60}+\frac{y}{500}=7$

$\therefore\ 25x+3y=10500$

(나) $\frac{x+y}{60}=28$

$\therefore\ x+y=1680$

19. 복소수 z가 $z+|z|=2+8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$의 값은? (단, $z=a+bi$ (a,b는 실수)일 때, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 이다.)

① 68　② 100　③ 169　④ 208　⑤ 289

해설

$z=a+bi$라 놓자.

$z+|z|=2+8i$,

$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+8i$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2,\quad b=8$

$a+\sqrt{a^2+64}=2$

$\sqrt{a^2+64}=2-a$ 양변제곱하면,

$a^2+64=(2-a)^2=a^2-4a+4$

$4a=-60,\ a=-15$

$\therefore\ |z|^2=a^2+b^2=225+64=289$

20. $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$

$= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2$가

x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2)$

$= y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8$

$= (1-4a)y^2 - 2y + 9$에서

$\frac{D}{4} = 1 - 9(1-4a) = 0$

$\therefore\ 1 - 9 + 36a = 0$

$\therefore\ a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

21. 이차방정식 $x^2+kx+3k-11=0$의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+kx+3k-11=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 하면
$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=3k-11$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=k^2-12k+44=(k-6)^2+8$
따라서 $k=6$일 때 $(\alpha-\beta)^2$는 최소

해설

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ 이므로
$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{k^2-12k+44}}{1}$
$\therefore\ k^2-12k+44$가 최소이려면 $k=6$

22. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5　　② 3　　③ $\frac{3}{2}$　　④ -2　　⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ 양변을
x^2 으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$$

$$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$
이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,
$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로
실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.
$\therefore a+b=4$

23. $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5+y^5=1$　② $x^7+y^7=1$　③ $x^9+y^9=1$

④ $x^{11}+y^{11}=1$　⑤ $x^{13}+y^{13}=1$

해설

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2-x+1=0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2-x+1=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=y^3=-1,\ x+y=1,\ xy=1$

① : $x^5+y^5=x^3\times x^2+y^3\times y^2=-(x^2+y^2)=-\{(x+y)^2-2xy\}=1$

② : $x^7+y^7=(x^3)^2x+(y^3)^2y=x+y=1$

③ : $x^9+y^9=(x^3)^3+(y^3)^3=-2$

④ : $x^{11}+y^{11}=(x^3)x^2+(y^3)^3y^2=-(x^2+y^2)=1$

⑤ : $x^{13}+y^{13}=(x^3)^4x+(y^3)^4y=x+y=1$

24. 방정식 $2x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x + y$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

준식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$5y^2 + 2(x+6)y + (2x^2 + 6x + 9) = 0$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4} \ge 0$

$$\frac{D}{4} = (x+6)^2 - 5(2x^2 + 6x + 9)$$
$$= -9x^2 - 18x - 9 = -9(x+1)^2 \ge 0$$

따라서 $-9(x+1)^2 = 0$

$x + 1 = 0$

$\therefore\ x = -1$

준식에 $x = -1$ 을 대입하면

$2 - 2y + 5y^2 - 6 + 12y + 9 = 0$

$5y^2 + 10y + 5 = 0$

$5(y+1)^2 = 0$

$\therefore\ y = -1$

$\therefore\ x + y = -2$

25. 방정식 $x^2 - 12x + 35 = 3^y$ 을 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ 의 값을 구하면?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x^2 - 12x + 35 = (x-6)^2 - 1 = 3^y$ 에서 $x - 6 = t$ 라 하면
$t^2 - 1 = 3^y$, $(t-1)(t+1) = 3^y$
따라서, $t+1$, $t-1$ 은 3^n 꼴이고 차가 2 이므로 $y = 1$ 이다.
$(t+1,\ t-1) = (3,\ 1),\ (-1,\ -3)$
$\therefore\ t = 2,\ -2 \quad \therefore\ (x,\ y) = (8,\ 1),\ (4,\ 1)$
$\therefore\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 14$